

# 格子ボルツマン法による2次元流路内流れの数値的研究

中西 助次\*・鈴木 文寛\*・山崎 哲史\*\*

(平成15年9月12日受理)

## Numerical Study for Two Dimensional Channel Flow by Lattice Boltzmann Method

Suketsugu NAKANISHI, Fumihito SUZUMURA and Akifumi YAMASAKI

(Received Sep. 12, 2003)

### Abstract

It has been verified by many researchers that the lattice Boltzmann method has the ability to simulate the viscous fluid flow as precisely as the finite difference method. The incompressible viscous fluid flow in the inlet section of two-dimensional channel are computed by the lattice Boltzmann method. In this paper, the computed results by the lattice Boltzmann method are compared with the results using finite difference method, and are discussed for the concave velocity profiles at the initial stage of development channel flow.

**Key Words:** Fluid Dynamics, Numerical Solution, Lattice Boltzmann Method, Navier-Stokes Equation, Channel Flow

### 1. 緒 言

数値流体力学における計算法は、質量と運動量の保存式から構成される連続の方程式と Navier-Stokes 方程式を差分法、有限要素法で解くことが一般的である。計算機の発展とともに、この手法を用いて乱流、流れの分岐現象、カオスの流れなど流れの複雑現象の問題に取り組んだ多くの研究がなされてきている<sup>1)~4)</sup>。その結果、種々の流れ現象の理解は深まっているものの、この解析方法は流体を連続体として近似し、ある領域で平均化して扱うため、平均化した流体特性しか得られない。一方、流体をミクロな物理現象である流体分子の衝突と並進とでモデル化した支配方程式を解くセルオートマトン (Cell Automata, 以下 CA と呼ぶ) 法の流体解析への適用が注目されてきている。CA 法は簡単な初期条件を与えることにより、流体粒子間の衝突の相互作用の積み重ねから流動現象を自己組織化する手法である。これは複雑な流動現象における情報や知識がなくても現象が再現できる可能性があり、現象の解明にこれまでとは異なった角度からの知見が得られる可能性を

有している<sup>5)</sup>。CA 法の流体解析への応用として、格子ガスオートマトン法 (Lattice Gas Automata, 以下 LGA と呼ぶ) や格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM と呼ぶ) が提案されてきた<sup>6)</sup>。中でも、LBM は LGA の欠点を克服し、かつその長所を受け継ぐものとして提案された計算手法であり最近特に注目されてきている。そのため、LBM に関する提案や報告は比較的多い。しかし、これらのほとんどは現象の再現という観点からのものであり、現象の解明という観点からの報告はあまり見られない。

著者らは現象の解明という観点から LBM に注目している。本論文では LBM によって現象の解明を行うことを目的とし、その第一段階として2次元平行平板助走区間流の計算を行い、その現象の再現と解明について考察した。

### 2. 基礎理論

本論文で用いる LBM の衝突演算には McNamara らのモデル<sup>7)</sup>を用い、2次元計算空間は Fig. 1 に示すような正三角形格子を用いて離散化される。流体粒子は格子点に

\* 広島工業大学工学部機械システム工学科

\*\* 広島工業大学大学院工学研究科機械システム工学専攻

静止している静止粒子 ( $i=0$ ) と,  $i=1\sim 6$  方向に伸びる格子線に沿って運動する運動粒子がある。粒子は格子点上で衝突し, その後隣接する格子点に運動粒子が移動する。時刻は整数値で進み, 各時刻において全粒子は各格子点上に存在する。また本論文での計算は McNamara の非熱流体モデルとし, 葛原らの報告<sup>7)</sup> と同様であるが, 参考のため以下の2.1~2.3にその概要を述べておく。

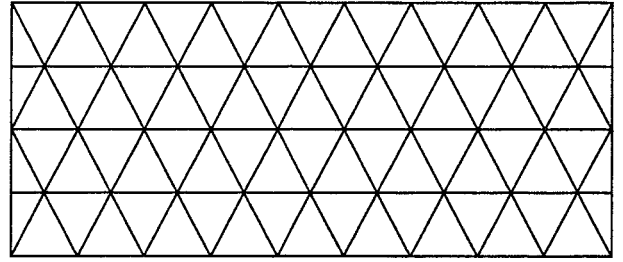


Fig. 1 Equilateral Triangle lattice

### 2.1. 格子点の状態

流体の運動状態は格子点上において定義される。粒子は1方向から6方向の格子線に沿って速度  $c_i$  で運動する。粒子を実数値である速度分布関数  $f_i$  ( $i=1\sim 6$ ) で表すと, ある時刻  $t$  における位置  $r$  の格子点での流体の密度および運動量は次式で表される。

$$\rho = \sum_{i=0}^6 f_i(t, r) \quad (1)$$

$$\rho u = \sum_{i=0}^6 f_i(t, r) c_i \quad (2)$$

### 2.2. 衝突と並進

粒子は衝突前後で質量と運動量が保存され, その規則に従って格子点上で衝突を行う。新たに生成される粒子の割合は, 衝突粒子の数密度と衝突断面積の積で求められる。進行方向が120度異なる運動粒子の2体衝突は, Fig. 2(a)に示すような新たな静止粒子と運動粒子を生じさせる。静止粒子と運動粒子との2体衝突では進行方向が120度異なる運動粒子が生じる (Fig. 2(b) 参照)。また, 運動粒子の3体衝突は3つの方向の運動粒子が生じる (Fig. 2(c) 参照)。これは, 数値的な安定性を得るために導入されている。

このような衝突の後, 粒子は隣接する格子点に移動して時刻が進み, 以後衝突と並進を繰り返す。

### 2.3. 流れの支配方程式

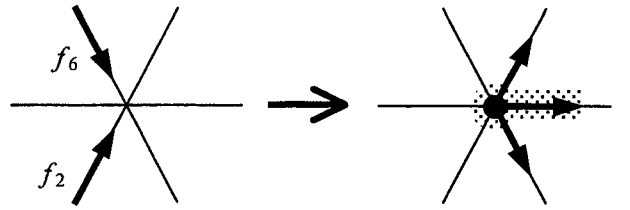
粒子に関する微視的な質量及び運動量の保存式は以下のように表される<sup>7)</sup>。

$$\sum_{i=0}^6 f_i(t+\tau, r+c_i\tau) = \sum_{i=0}^6 f_i(t, r) \quad (3)$$

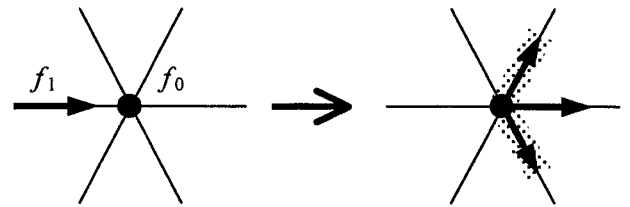
$$\sum_{i=1}^6 f_i(t+\tau, r+c_i\tau) c_i = \sum_{i=1}^6 f_i(t, r) c_i \quad (4)$$

粒子分布が平衡状態に近い場合, 分布関数  $f_i$  は Knudsen 数に相当する微量  $\varepsilon$  を用いて平衡状態周りに次のように展開できる。

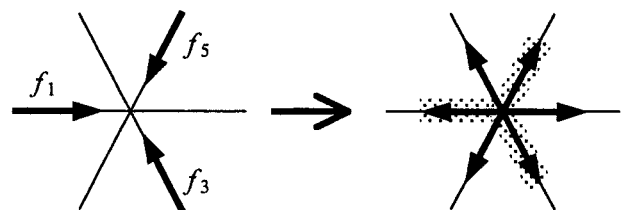
$$f_i = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \dots \quad (5)$$



(a) Two-body collision (a still particle is produced)



(b) Two-body collision (a still particle is consumed)



(c) Three-body collision

Fig. 2 Collision model

これを式(3)(4)に代入して Taylor 展開を行うと Knudsen 数の2次のオーダーの項から次の式(6), 式(7)に示すような巨視的な流れの支配方程式を導ける。

$$\partial_t \rho = -\partial_\alpha (\rho u_\alpha) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho u_\alpha) + \frac{6+F_0}{12} \partial_\beta (\rho u_\alpha u_\beta) = & -\partial_\alpha P \\ & + \left( 2 - \frac{12}{6+F_0} \right) \partial_\alpha (\rho \xi \partial_\beta u_\beta) \\ & + \partial_\beta \left[ \rho \gamma (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \delta_{\alpha\beta} \partial_\gamma u_\gamma) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

式(6), 式(7)は, それぞれ連続の式と Navier-Stokes 方程式に対応した形の式となっている。ここで,  $F_0$  は2体衝突における衝突断面積の比,  $c$  は粒子の移動速度,  $\tau$  は時間刻みである。また, 圧力  $P$ , 動粘性係数  $\nu$ , 体積粘性係数  $\xi$  はそれぞれ

$$P = \frac{3\rho c^2}{6+F_0} \left[ 1 + \frac{6+F_0}{6} \left( \frac{6+F_0}{12} - 1 \right) \frac{u^2}{c^2} \right] \quad (8)$$

$$v = \frac{\tau c^2}{8} \left( \frac{1}{2\sigma_{prod} d} - 1 \right) \quad (9)$$

$$\xi = \frac{\tau c^2}{8} \left( \frac{1}{\sigma_{prod} d} - 1 \right) \quad (10)$$

で表される。式(8)~(10)における、 $\sigma_{prod}$  は静止粒子を生成する衝突に関する衝突断面積、 $d = \rho / (6 + F_0)$  は運動粒子の平均密度である。 $F_0 = 6$  おくと、式(7)の対流項の係数が1となり、式(7)は Navier-Stokes 方程式そのものになる。また、このことは、圧力の式(8)から局所的な流速の影響を排除することを意味している。さらに式(9)から、括弧内の分数を1に近づけることは、任意に低い粘性を設定することに対応している。

## 2.4. 境界条件の設定法

境界条件は葛原らの提案した設定手法を用いた<sup>8)</sup>。

McNamara らのモデルでは、局所平衡状態に達するときの粒子の分布  $F_0$  は Maxwell-Boltzmann 分布に類似した形式

$$f_i = F_i \exp[h(\rho, u) + q(\rho, u)c_i] \quad (11)$$

で表される。ここで、 $F_i = 1$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) である。

境界条件の設定は、境界上の速度が粒子分布から求められる式(2)による流速と一致することが要求される。葛原らの境界条件の設定手法<sup>8)</sup>では、粒子分布によって境界条件が表現されると考え、境界上の格子点では局所平衡状態に達していると思なして式(11)に従う粒子数密度を与えて境界を模擬する方法をとっており、本論文でもこの手法に従うものとする。

## 3. 計算モデルおよび境界条件

本論文で用いた、計算モデルとその境界条件を示す。

### 3.1. 計算モデル

数値解に用いたモデルは、間隔  $h$  で置かれた2次元平行平板助走区間での非圧縮性流体の流れである。流れは定常な2次元層流であり、流路入口では圧力  $P_0$ 、平板に平行に流速  $u_0$  の一様な速度分布で流入するものとする。出口は自然流出とする。座標系は Fig. 3 に示すように流路入口下端を原点に、流れ方向の平板壁に沿って  $x$ 、それに垂直に  $y$  を選ぶ。また流れに外力は働かないものとする。

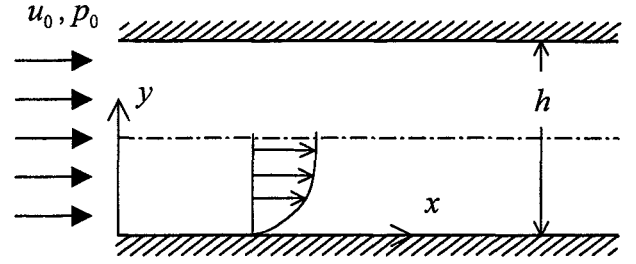


Fig. 3 Computational model of channel flow

### 3.2. 境界条件

平板境界は式(11)に  $U=0, V=0$  を代入して境界上の分布関数を得る。流入流出境界は計算領域外からの進入粒子を計算し得られた分布関数と各境界での速度を式(11)に代入して分布関数を得る。流入境界では  $U=1, V=0$  を用い、流出境界では管路内側の隣接格子の速度を用いる。

## 4. 結果および考察

計算結果が助走区間流を再現しているかどうかの確認と、LBM の特徴である粒子数密度分布の変動より、助走区間流の現象について考察する。

### 4.1. 現象の再現

Fig. 4 は得られた結果のうち、 $Re=30$  を選んで、 $X=2, 6, 10, 170$  における流速分布を示したものである。図中のプロットは LBM より得られた結果であり、また実線は比較のため差分法 (Finite Difference Method, 以下 FDM と呼ぶ) により得られた結果を示したものである。

図より、LBM から得られた結果は、 $X=2, 6, 10, 170$  において FDM の結果とよく一致しており、助走区間流れが再現されている。Fig. 5 は質量流量と体積流量の流れ方向変化を示したものである。ここで、体積流量  $Q_v$  は流速の積分値

$$Q_v = \int_0^1 u(Y) dY$$

であり、質量流量  $Q_m$  は1格子当たりの平均粒子密度と体積流量の積で定義する。図より、質量流量は流入流出部を除いた任意の断面で一定であり、質量が保存されていることがわかる。次に体積流量を見ると、流体が見かけ上圧縮性を有しているため、下流に行くに従って、ほぼ線形に増加した結果となっている。質量流量が一定で体積流量が増加することは流体の膨張を意味している。しかし、この圧縮性による流量増加は極めて小さな値であり、流体を十分に非圧縮性とみなすことができる。

### 4.2. 流速分布

LBM より得られた、助走区間流の流速分布を Fig. 6(a),

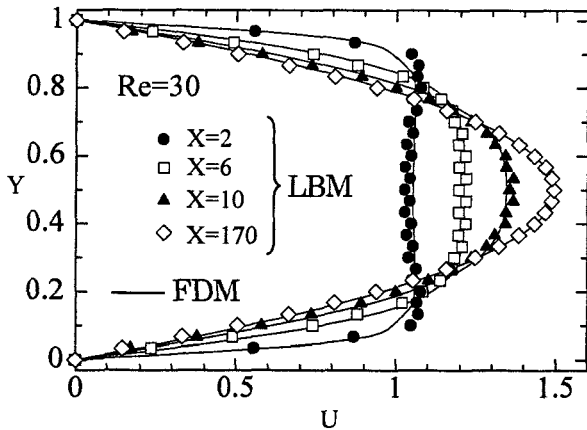


Fig. 4 Comparison of velocity distribution between of LBM and FDM

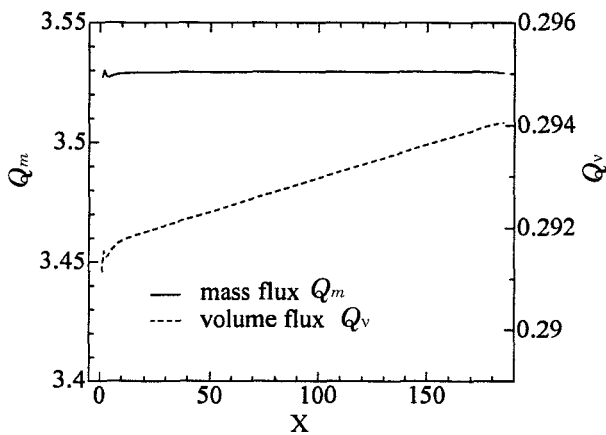
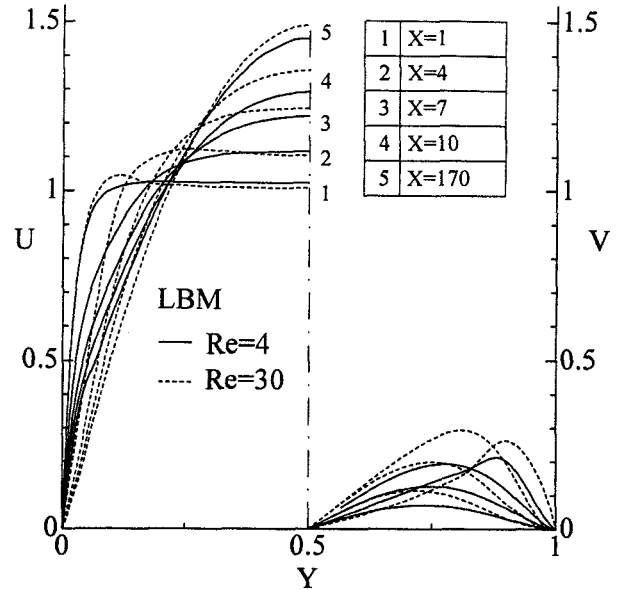


Fig. 5 Distribution of mass flux and volume flux

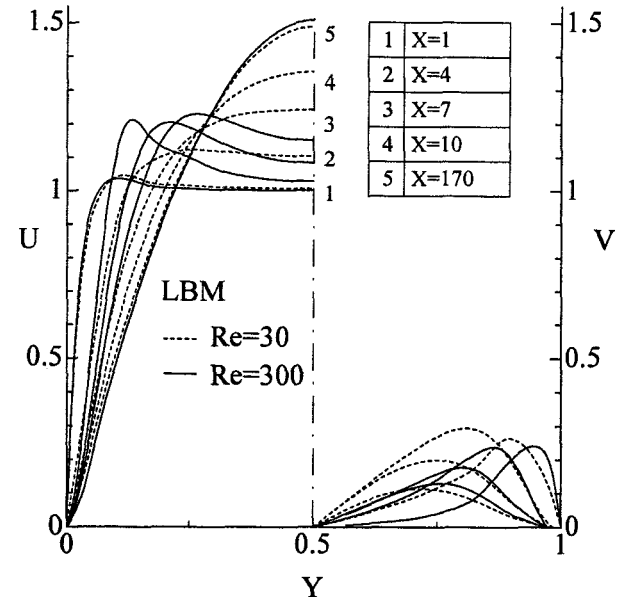
(b) に示す。尚、図が輻輳しないよう Fig. 6 (a) には  $Re=4$  と  $Re=30$  を、Fig. 6(b) には  $Re=30$  と  $Re=300$  を示す。

Fig. 6(a) より、 $Re=4$  では流入直後から普通考えられる凸状 ( $\partial^2 U / \partial^2 Y < 0$ ) の流速分布で発達してゆくが、 $Re=30$  では、流れの発達初期段階で、中心領域の速度分布が凹状 ( $\partial^2 U / \partial^2 Y < 0$ ) となる傾向が見られる。このことは、差分法による結果でも同様である<sup>9)</sup>。また、中西は<sup>9)</sup>、この傾向は  $Re=19$  をはさんで  $Re < 19$  では  $Re=4$ 、 $Re > 19$  では  $Re=30$  の場合と同様な傾向であり、 $Re < 19$  の範囲では  $Re$  数の変化に対して流速分布はさほど変化しないが、 $Re > 19$  の範囲では  $Re$  数が増加するに従い流速分布の凹状となる傾向は顕著になると述べている。LBM の結果からも  $Re=300$  になると、 $Re=30$  と比べてさらに顕著な凹状分布となっていることがわかる (fig. 6(b) 参照)。

上述した流路入口近傍の領域で流速分布が凹状となる現象は LBM, FDM いずれの結果からも得られる。これについて中西は<sup>9)</sup>、その物理的意味については検討を要するとしているものの十分な解釈はなされていない。そこで、質量および運動量を保存しながら運動する LBM の流体粒子



(a)  $Re=4, Re=30$



(b)  $Re=30, Re=300$

Fig. 6 Velocity distribution in inlet region

の数密度分布を見ることにより流速分布について次節で考察する。

### 4.3. 粒子数密度

LBM での粒子の動きを追い、その自己組織化の過程を調べることで、現象の解明につながると考える。そこで、本論文ではその第一段階として、粒子の数密度の変化に注目し、それにより粒子の動きを予測して現象の解明について考察することを試みる。

Fig. 7 に各断面での 6 方向の粒子数密度を示す。Fig. 7 (a) を見ると、流路入口である  $X=0$  では各方向粒子とも類似した数密度分布を示す。しかし、流れ方向に進むにつ

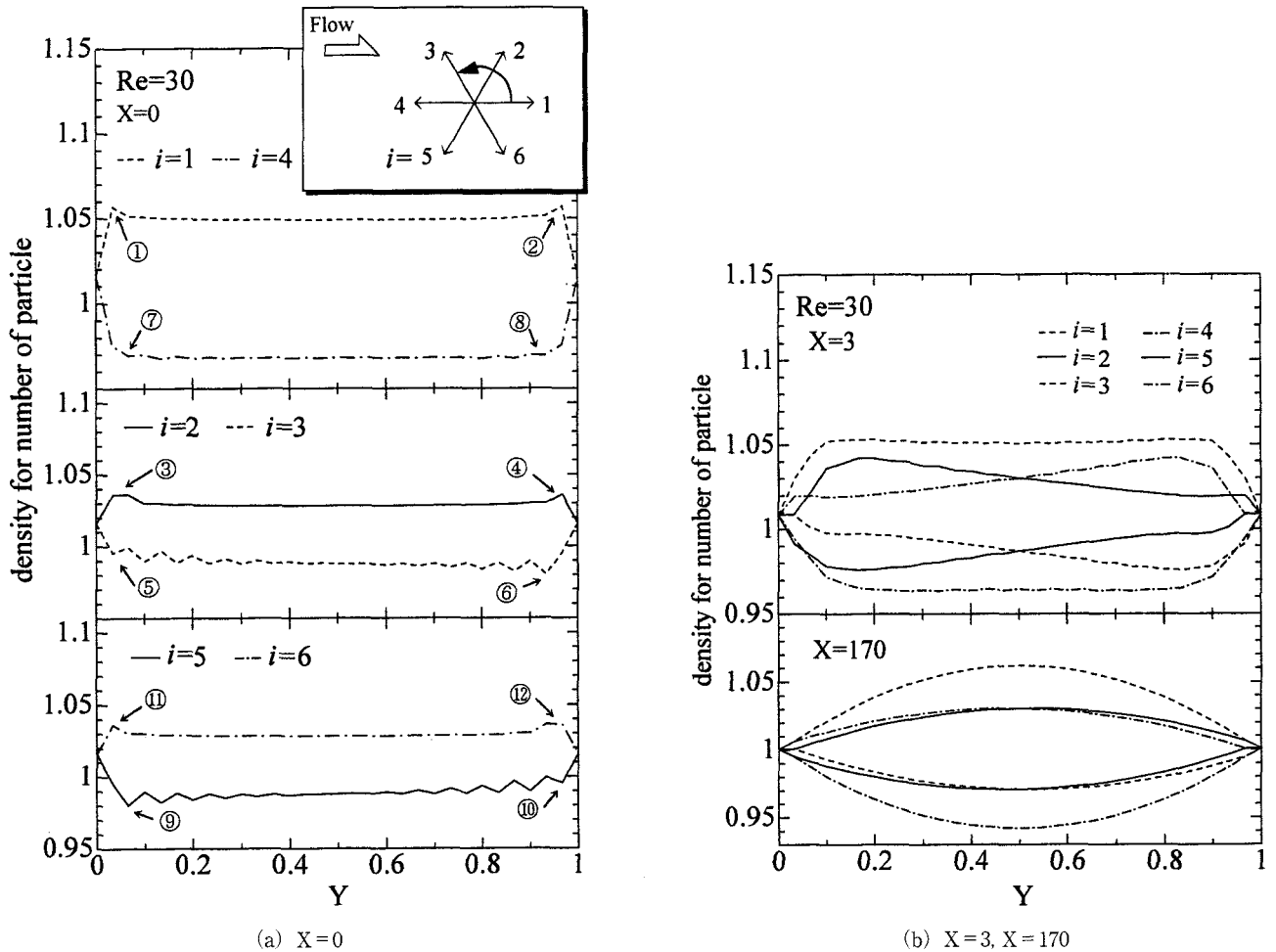


Fig. 7 Distribution of density for number of particle (Re=30)

れ、粒子数密度は大きく変化する (Fig. 7(b) 参照)。

流れ方向へ向かう粒子  $i=1$  は、 $X=0$  で上下壁近傍に2つの正のピーク①, ②を持つが、それらは下流へ行くに従い中央へと移動し、ピーク値を持たない分布へと変化し、やがて放物分布に収束する。流れ方向から60度上方へ向かう粒子  $i=2$  は、 $X=0$  で上下壁近傍に2つの正のピーク③, ④を持つが、④はすぐに減衰し、③は下流へいくに従い中央へと移動し、ついには放物分布に収束する。流れ方向から120度上方へ向かう粒子  $i=3$  は、 $X=0$  で上下壁近傍に2つの負のピーク⑤, ⑥を持つが、⑤はすぐに減衰し、⑥は下流へいくに従い中央へと移動し、ついには放物分布に収束する。流れ方向と逆へ向かう粒子  $i=4$  は、 $X=0$  で上下壁近傍に微小な2つ負のピーク⑦, ⑧を持つが、それらは下流へいくに従い中央へと向かいながら滑らかになり、放物分布へと収束する。流れ方向から120度下方へ向かう粒子  $i=5$  は、 $X=0$  で上下壁近傍に2つの負のピーク⑨, ⑩を持つが、⑩はすぐに減衰し、⑨は下流へいくに従い、中央へと移動しやがて放物分布へと収束する。流れ方向から60度下方へ向かう粒子  $i=6$  は、 $X=0$  で上下壁面近傍に2つの正のピーク⑪, ⑫を持つが、⑪はすぐに減衰し、⑫は下流に

いくに従い、中央へと向かいながら滑らかになり、やがて放物分布に収束する。

ここで、各方向の粒子数密度のピーク位置の変化に注目することで、粒子の統計的な移動方向を予測することができる。Fig. 8は、これを見るために粒子数密度のピーク位置変化を示したものである。

Fig. 8を見ると、どの運動方向粒子も壁から流路中央へ向かって粒子が移動していることがわかる。これは入口から入ってくる粒子が壁面での影響を受けているからであり、その粒子が中央にまで影響を与えるものと考えられる。しかし、Re数によっても、また粒子の運動方向によってもそれらの移動速度には差がみられる。つまり、壁面からの影響は同等に各運動方向粒子に伝わるわけではない。粒子数密度のピーク位置変化だけからでは明確に凹状流速分布の流れ構造を説明することは出来ない。したがって、今後さらに、粒子数密度の量からも考察していく必要がある。

## 5. 結 言

LBMを用いて、2次元平行平板助走区間流の計算を行い、現象の再現の確認と、発達過程の粒子数密度分布のピ

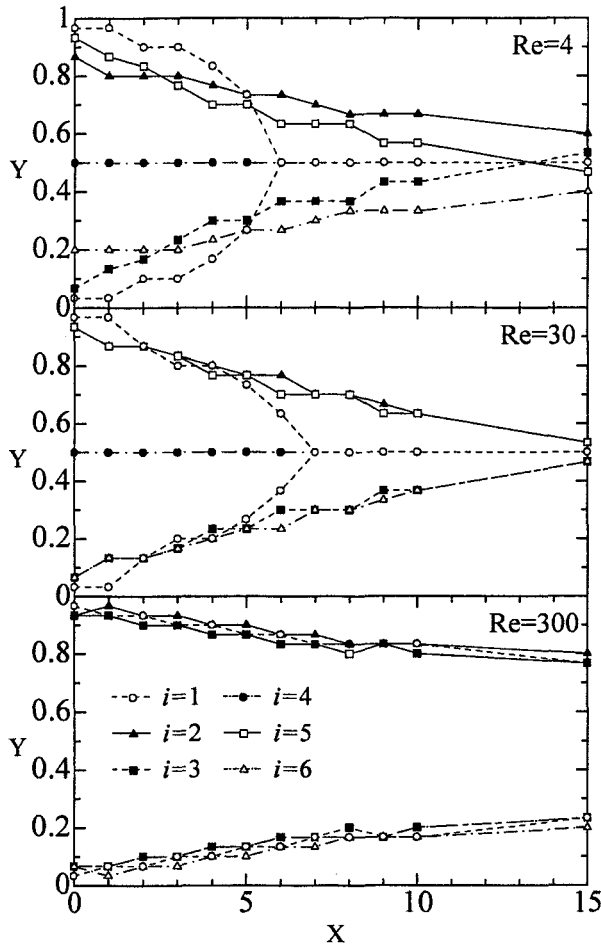


Fig. 8 Peak point change of a particle distribution

ーク位置から流速分布が凹状を示す現象の考察を行った。

- 1) LBM で求めた流れは FDM で求めた流れとよく一致しており、このことより LBM により流れ現象の再現が確認できた。

- 2) 速度分布と粒子数密度の関係を考察し、現象の解明の可能性を示せた。

最後に、粒子数密度が現象の解明の糸口と考えられるので、今後は粒子数密度を更に詳しく見ていく必要がある。

### 文 献

- 1) C. Taylor and K. Morgan, Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Swansea, U. K., (1980)
- 2) R. L. Dewar and B. I. Henry, Nonlinear Dynamics and Chaos, World Scientific, (1991)
- 3) C. Taylor, J. H. Chin and G. M. Homsy, Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, U. K., (1991)
- 4) Garnett P. Williams, Chaos Theory Tamed, Taylor & Francis, (1997)
- 5) 加藤・光成・築山, セルオートマトン法-複雑形の自己組織化と超並列処理-, 1-7, 森北出版, (1998)
- 6) 加藤・光成・築山, セルオートマトン法-複雑形の自己組織化と超並列処理-, 41-42, 森北出版, (1998)
- 7) 蔦原・他, 格子気体法・格子ボルツマン法-新しい数値流体力学の手法-, 56-99, コロナ社, (1999)
- 8) 蔦原・富山等, 格子ボルツマン法における境界条件の設定に関する研究, 日本機会学会講演論文集, No. 954-2, 94-96, (1995)
- 9) 中西, 小さな Reynolds 数における平行平板間の助走区間流れについての数値解, 広島工業大学紀要 第12巻, 107-112, (1978)