

2次元急拡大流路内流れに関する研究

(流路中心線上の流速値を用いた流れ構造の予測)

中西 助次*・西 槇 伸之**

(平成 8 年 9 月 25 日受理)

Study in Two-Dimensional Sudden Expansion Channel Flow

(Prediction of Flow Structure by the Value of Streamwise
Velocity on Centerline of Channel)

Suketsugu NAKANISHI and Nobuyuki NISHIMAKI

(Received Sept. 25, 1996)

Abstract

The objective of this study was to examine the flow structure for a laminar separated flow through a two-dimensional symmetric sudden-expansion channel of expansion ratio α . As a computational and analytical model of the expansion channel, the two-dimensional channel with backward-facing steps on both upper and lower walls was considered. The Navier-Stokes equations were solved numerically by the finite difference method. The calculation was performed for the range of Reynolds number $Re \leq 400$. In this paper, the analytical prediction of the separated flow structure using the numerical results of the streamwise velocity on the centerline was made for the case of expansion $\alpha=2$.

The analytical results of the velocity profile and the distribution of pressure gradient were presented and were compared with that of numerical results.

Key Word: Separation, Numerical Analysis, Finite Difference Method, Reattachment Point, Expansion Channel Flow, Laminar Flow, Navier-Stokes Equation.

1. はじめに

対称急拡大流路内のステップ下流の流れは比較的低レイノルズ数 Re で定常対称流から定常非対称流へ分岐 (ピッチフォーク分岐) すること, またその分岐レイノルズ数 Re_c は流路拡大比 α とアスペクト比 W/H (W は流路幅, H は流路高さ) に依存することが実験的, 数値計算的あるいは解析的に報告されている^{1)~10)}. また, Re 数変化にともなうステップ下流の

流れの変化は, Re 数の増加とともに定常対称流から定常非対称流へと分岐し, その後, 流れは 3 次元性が現れ, 定常 3 次元流となる。さらにレイノルズ数を増加させると, 流れはホップ分岐して非定常流へ, そして乱流へと遷移する変化過程を示すことが報告されている⁴⁾. 著者らは, 既報¹¹⁾¹²⁾ でこれらの現象を α , Re 数をパラメータとしてナビエ・ストーク方程式を数值的に解いて調べ, 定常対称流から定常非対称流への分岐が起こる Re 数範囲に注目し, 流れパターン, 流速

* 広島工業大学工学部機械工学科

** 広島工業大学大学院修士課程機械システム工学専攻

分布, 剥離循環渦長さについて報告した。また, この種の流れに関する実験は, 測定が困難 (低 Re 数の流れ場であるので低流速であり, またそれともなり圧力, セン断応力などの力学的諸量の値が小さい。あるいは流路の幾何寸法が小さいことによる) であるので, 本研究の結果が実験的研究に反映参照されるように, 実験では最も代表的に測定がなされる流路中心軸上および壁での力学量について検討し考察した。

本論文はこれらの結果をふまえ, 数値計算で得られた流路中心軸上での値を用いて, 解析的に流路全体の流れの予測可能性をさらに検討したものである。

2. 基礎方程式

図1に示すような対称急拡大流路におけるステップ下流 ($x \geq 0$) の流れを解析の対象として考える。そこでの流速および圧力を $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ および $\bar{p}(x, y)$ とし, これらをステップ下流での流路幅 ($H+2h$) に

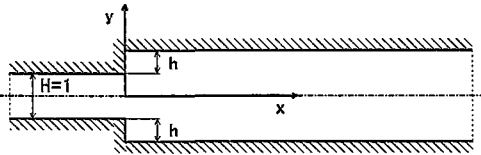


Fig. 1 Computational and analytical model for symmetric expansion channel.

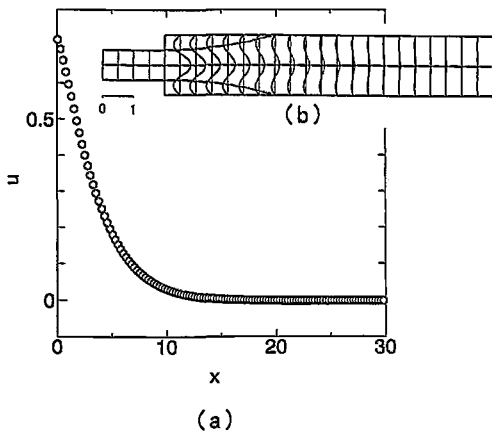


Fig. 2 Streamwise velocity profiles for case of $Re=100$.
(a) Velocity distribution $u(x)$ on centerline. ($y=0$)
(b) Velocity profile $u(y)$ at arbitrary location x .

対する2次元ポアズイユ流の流速と圧力 $U(y)$, $P(x)$ とそれからの変化量 $u(x, y)$, $v(x, y)$ および $p(x, y)$ とで

$$\bar{u}(x, y) = U(y) + u(x, y) \quad (1)$$

$$\bar{v}(x, y) = v(x, y) \quad (2)$$

$$\bar{p}(x, y) = P(x) + p(x, y) \quad (3)$$

と表す。ナビエ・ストークス方程式, $NS[\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}]$ と $NS[U, P]$ との差をとると, ステップ下流での u, v, p についての方程式は,

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (4)$$

$$U \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta v \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

ここで, (1)~(6)は代表速度をステップ上流での流路断面平均流速 U_m , 代表寸法をステップ上流流路幅 H に選んだ無次元表示である。また(4), (5)の記号 Δ はラプラシアン $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ であり, Re は $Re = U_m$

H/ν (ν は動粘度) で定義されるレイノルズ数である。圧力 p は ρU_m^2 で無次元化した。図2に示すように, 流れ方向流速分布の数値計算結果 ($Re=100$ での $u(x, y)$ 分布) を見ると, u は下流にゆくにしたがい指数関数的に減少し, またその流路横断面方向の分布 $u(y)|_{x=x}$ は, 任意の x の位置で近似的に4次曲線の分布となっている。この数値計算結果から推測して (4), (5), (6)の解 $u(x, y)$ および $v(x, y)$ を

$$u = \Delta u e^{-\xi_1 x} (1 + C e^{-\xi_2 x}) f(y) \quad (7)$$

f の添字記号プライムは y に関する微分 ($f' \equiv df/dy$) を示す。 $v(x, y)$ は(7)と連続の式(6)を用いて

$$v = \Delta u e^{-\xi_1 x} \{ \xi_1 + (\xi_1 + \xi_2) C e^{-\xi_2 x} \} f(y) \quad (8)$$

ここで,

$$f(y) = A_{00} + \sum_{n=0}^6 \frac{1}{n+1} A_n y^{n+1} \quad (9)$$

$$f'(y) = \sum_{n=0}^6 A_n y^n \quad (10)$$

と仮定する。上述したが, 流速分布 $u(y)|_{x=x}$ は図の概観からすれば4次曲線であるが, 実際には(10)式で示す6次曲線近似が結果として良い一致を示した。

3. 結果と考察

前述したが, ステップ下流の流れはレイノルズ数が増加し, 臨界レイノルズ数 Re_c を越えるとナビエ・ストークス方程式の解の一意性がくずれ, 流れは分岐

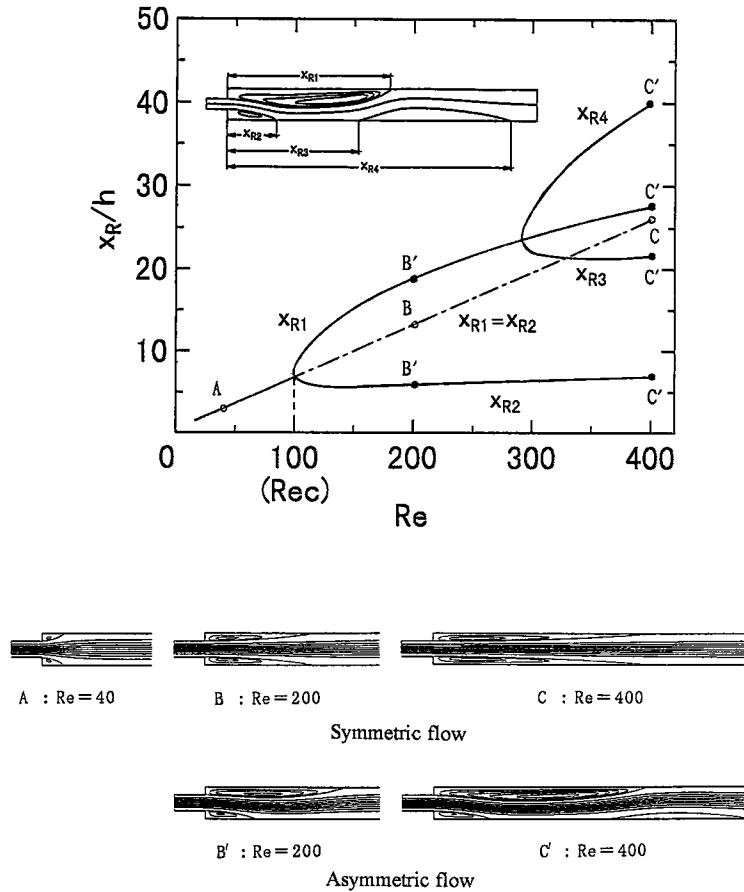


Fig. 3 Flow pattern and variation of recirculation zone length as Reynolds number varies.

する (図3参照)。ただし、本論文での解析対象は、対称流に限定し、しかも流路拡大比 $\alpha=2$ の場合のみについて考える。流れの分岐現象および非対称流れは、流体力学の基礎として重要であり、また流れの制御など工学的応用面からも興味ある問題であるが、これに関する検討は別の機会にて報告する。

3.1 流速分布

壁で流れはすべり無し境界条件; $y=\pm 1$ で $u=v=0$ を用いると、(7), (8)より $f'(\pm 1)=f(\pm 1)=0$ となる。これより(9), (10)の $A_{00}, A_n (n=0\sim 6)$ を決定すると、

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -12A_{00} - 4A_1 \\ A_4 &= -15A_0 - \frac{10}{3}A_2 \\ A_5 &= 12A_{00} + 3A_1 \\ A_6 &= 14A_0 + \frac{7}{3}A_2 \end{aligned} \right\} (11)$$

これに流路中心軸に対する流れの上下対称流の条件;

$$y=0 \text{ で } v = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ (} f(0) = f''(0) = 0 \text{)} \text{ および } y=\pm 1 \text{ で}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=1} = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=-1}$$

したがって $f'''(1) + f'''(-1) = 0$ を用いると(11)は

$$\left. \begin{aligned} A_{00} &= A_1 = A_3 = A_5 = 0 \\ A_2 &= -\frac{15}{2}A_0 \\ A_4 &= 10A_0 \\ A_6 &= -\frac{7}{2}A_0 \end{aligned} \right\} (12)$$

と決定できる。また、 $\xi_1, \xi_2, \Delta u, C$ は流路中心軸上 ($y=0$) での $u(x)|_{y=0}$ 分布で決定できる。その結果を表1および図4に示す。これらの係数および定数値を(7), (8)に用いて計算した流速分布 $u(x, y), v(x, y)$ を図5および図6に示す。図から、 $u(x, y), v(x, y)$

Table. 1 Calculated range of Reynolds number Re and value of coefficient.

Re	$\Delta u A_0$	ξ_1	C	ξ_2
20	0.9	1.12	-0.2	2.7
40	0.9	0.69	-0.2	1.7
60	0.9	0.49	-0.2	1.2
80	0.9	0.37	-0.2	0.9
100	0.9	0.31	-0.2	0.8
120	0.9	0.26	-0.2	0.6
160	0.9	0.20	-0.2	0.5
200	0.9	0.16	-0.2	0.4
240	0.9	0.13	-0.2	0.4

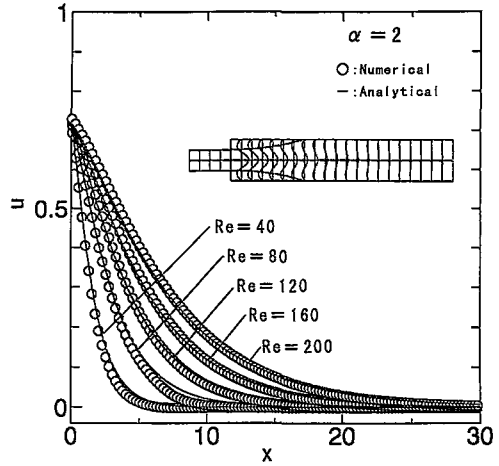


Fig. 5 Comparison of u -velocity profiles between numerical and analytical results. (a) Velocity distribution $u(x)$ on centerline. ($y=0$)

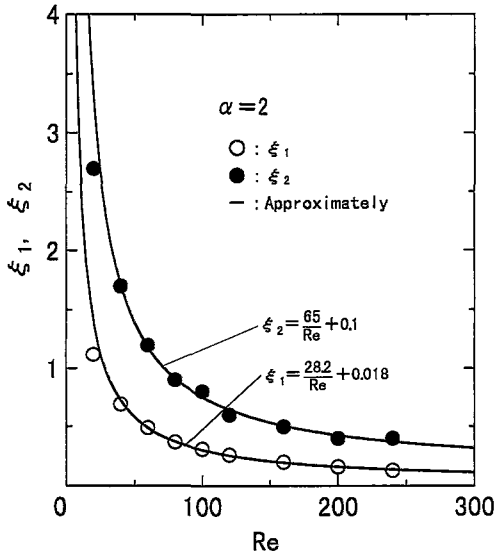


Fig. 4 Variation of ξ_1 and ξ_2 as Reynolds number varies.

分布のいずれの場合も数値計算の結果と良い一致を示している。これより、仮定にもとづく(4), (5), (6)式の近似解(7), (8)の妥当性を示せたこと、また対称な流れであれば流路中心軸上の流速分布 $u(x)|_{y=0}$ より流れ場の予測が可能であることを示せた。

3.2 剥離循環渦長さ

ステップ角で剥離した流れの流線がステップ下流の流路壁へ再附着する位置 x_R を壁面せん断応力 $\tau_w = \partial \bar{u} / \partial y = 0$ となる位置と定義する。そうすると、

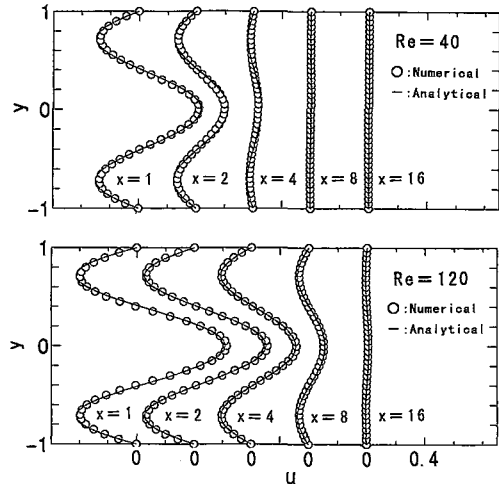


Fig. 5 Comparison of u -velocity profiles between numerical and analytical results. (b) Velocity profile $u(y)$ at arbitrary location x .

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{\text{at wall}} = \left. \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right|_{y=\pm 1} = 0$$

したがって(7)より再附着点 x_R が

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{\text{at wall}} = -2By|_{y=\pm 1} + \Delta u e^{-\xi_1 x_R} (1 + C e^{-\xi_2 x_R}) f''(\pm 1) = 0 \quad (13)$$

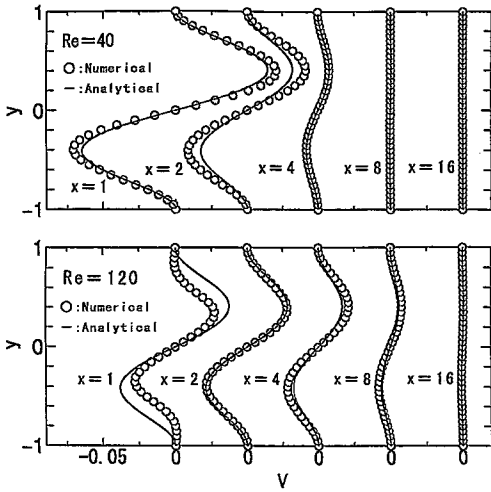


Fig. 6 Comparison of v -velocity profiles between numerical and analytical results.

$$\therefore U=B(1-y^2)$$

で決定できる。流れが対称であるので、 $y=\pm 1$ の内 $y=1$ について考えればよく、また、(11)、(12)を用いると、(13)は

$$B=2\Delta u A_0 e^{-\xi_1 x_R} (1 + C e^{-\xi_2 x_R}) \quad (14)$$

さらに、再付着点近傍では Re 数によらず $C e^{-\xi_2 x_R} \cong 0.01$ の一定値をとることを考慮し、また、 $\Delta u A_0 = 0.9$ および流路幅 $(H+2h)/H=2$ における B の値 $B=0.75$ を用いると、(14)は近似的に $0.421 = e^{-\xi_1 x_R}$ と表わせる。これより

$$\ln 0.421 = -\left(\frac{28.2}{Re} + 0.018\right) x_R \quad (15)$$

$$\therefore \xi_1 = \frac{28.2}{Re} + 0.018$$

ここで、 $\xi_1 = 28.2/Re + 0.018$ (図3参照)である。したがって、(15)を整理して再付着点位置 x_R は

$$x_R = 0.031 Re / (1 + 6 \times 10^{-4} Re) \quad (16)$$

と表わせる。

図7は x_R の数値計算の結果と(16)との比較を示したものである(ただし、(16)の $6 \times 10^{-4} Re$ は微小であるので無視してよいとした)。両者は良く一致した結果となっており、 $Re < 400$ の領域では x_R を $x_R = 0.031 Re$ で予測できる。

3.3 流路中心軸上での圧力勾配分布

流路中心軸上で $v=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ および $\frac{\partial U}{\partial y}=0$ の対称条件を用いると、(4)は

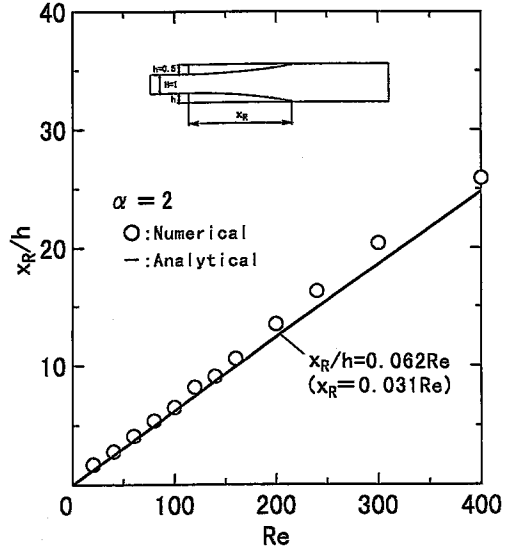


Fig. 7 Variation of reattachment points as Reynolds number varies.

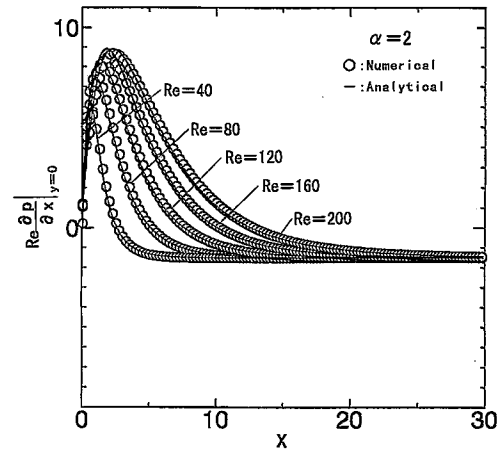


Fig. 8 Distribution of streamwise pressure gradient on the centerline for numerical and analytical results.

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (17)$$

となる。これに(7)~(10)を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0} &= \{\xi_1 \Delta u e^{-\xi_1 x} + (\xi_1 + \xi_2) C \Delta u e^{-(\xi_1 + \xi_2)x}\} U f' \\ &+ \{\xi_1 \Delta u^2 e^{-2\xi_1 x} + (2\xi_1 + \xi_2) C \Delta u^2 e^{-(2\xi_1 + \xi_2)x} \\ &+ (\xi_1 + \xi_2) C^2 \Delta u^2 e^{-2(\xi_1 + \xi_2)x}\} f'' \end{aligned}$$

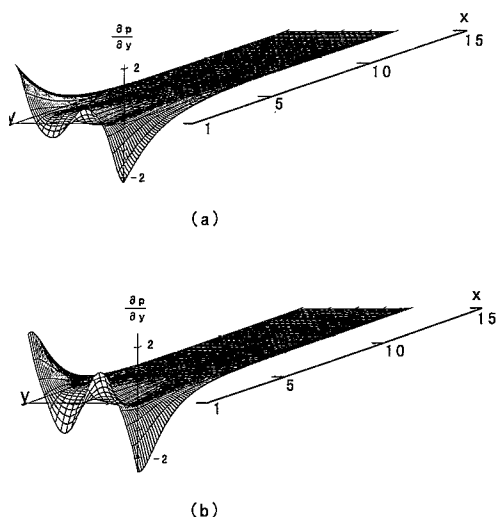


Fig. 9 Distribution of pressure gradient in channel. (a) Analytical results. (b) Numerical results.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{Re} \left[\{ \xi_1^2 \Delta u e^{-\xi_1 x} + (\xi_1 + \xi_2)^2 C \Delta u e^{-\xi_1 + \xi_2 x} \} f' \right. \\
 & \left. + \{ \xi_1 \Delta u e^{-\xi_1 x} + C \Delta u e^{-\xi_1 + \xi_2 x} \} f'' \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

が得られる。(9), (10), (12)より $f'(0) = A_0$, $f''(0) = 2A_2 = -15A_0$, $U(0) = B(1 - y^2)|_{y=0} = B (=0.75)$ および各係数値(表1)を用いて(16)を計算した結果を図5に示す。この結果と数値計算の結果とは良く一致している。

3.4 流路横断面方向圧力勾配分布

方程式(5)に(7)~(10)を用いて、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial y} = & \{ \xi_1^2 \Delta u e^{-\xi_1 x} + (\xi_1 + \xi_2)^2 C \Delta u e^{-\xi_1 + \xi_2 x} \} Uf \\
 & + \{ \xi_2^2 C \Delta u^2 e^{-\xi_2 x} \} ff' \\
 & + \frac{1}{Re} \left[\{ \xi_1^3 \Delta u e^{-\xi_1 x} + (\xi_1 + \xi_2)^3 C \Delta u e^{-\xi_1 + \xi_2 x} \} f \right. \\
 & \left. + \{ \xi_1 \Delta u e^{-\xi_1 x} + (\xi_1 + \xi_2) C \Delta u e^{-\xi_1 + \xi_2 x} \} f'' \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

が得られる。 $-1 < y < 1$ であるので Uf, ff', f, f'' における y の4次以上の項は高次の微小項として無視できるものとして、(19)を計算した結果を図9に示す(計算にあたっての各係数および定数値 An ($n=1 \sim 6$) は表1および(12)による)。図から(19)による解析解の結果は数値計算の結果と定性的に一致しており、対称流の分布を表現できていると考えられる。

4. 結 論

ステップ的に急拡大する2次元急拡大流路の流れについて、数値的に得られた流路中心軸上の流れ方向流速分布から解析的に流路全体の流れ構造の予測を試みた。その結果、以下の点を明らかにした。

- (1) 流れが対称な流れ(流れの分岐による非対称流でない)であれば、流路中心軸上の流速分布 $u(x)|_{y=0}$ のみを用いて、流路全体の流れ $u(x, y)$ および $v(x, y)$ を解析的に求めることができる。
- (2) 剥離流線の再付着点(剥離循環渦長さ)は解析解 $\bar{u}(x, y)$ より $\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{\text{at wall}}$ で解析的に評価でき、 $\alpha=2$, $Re < 400$ の場合、再付着点距離 x_R は $x_R = 0.031Re / (1 + 6 \times 10^{-4}Re)$ の関係で表すことができる。
- (3) 流路中心軸上の流れ方向圧力勾配分布は解析的に求めることができる。
- (4) ステップ近傍の横断面方向圧力勾配分布は、定量的な解析解は困難であるが定性的に表現できる。

文 献

- 1) Durst, F., Melling, A. and Whitelaw, J. H., J. Fluid Mech., 64 (1974), 111-128.
- 2) 光永・高岸・遠藤・広瀬, 機論, 44-348, 2 (1978), 2734-2740.
- 3) Cherdron, W., Durst, F. and Whitelaw, J. H., J. Fluid Mech., 84 (1978), 13-31.
- 4) Sobey, I. J., J. Fluid Mech., 151 (1985), 395-426.
- 5) Fearn, R. M., Mullin, T. and Cliffe, K. A., J. Fluid Mech., 211 (1990), 595-608.
- 6) Durst, F., Pereira, J. C. F. and Tropea, C., J. Fluid Mech., 248 (1993), 567-581.
- 7) Ouwa, Y., Watanabe, M. and Matsuoka, Y., J. J. A. P., 25-11 (1986), 1736-1740.
- 8) 光永・広瀬, 機論, 42-364, 2(1976), 3899-3905.
- 9) 太田・柳岡・畑, 機論, 60-579, B (1994), 3930-3936.
- 10) Shapira, M., Degani, D. and Weihs, D., Computers and Fluids, 18-3 (1990), 239-258.
- 11) 中西・桜井・大坂, 機論, 61-582, B (1995), 460-467.
- 12) 中西・桜井・大坂, 機論, 61-589, B (1995), 3182-3189.