

急拡大流路内流れの数値解についての一考察

中西 助次*・小田 伸剛**

(平成 6 年 9 月 30 日受理)

A Consideration on the numerical solution in a sudden expansion channel flow

Suketsugu NAKANISHI and Nobutake ODA

(Received Sept. 30, 1994)

Abstract

The objective of this study is to examine numerically the laminar separated flow in a symmetric sudden expansion channel. As a computational model of the symmetric sudden expansion channel, the two-dimensional channel with backward facing steps on both upper and lower walls were considered, and a small suction hole was placed at the lower wall underneath the step. Two-dimensional time-dependent Navier-Stokes equations and the equation of continuity were solved numerically by the finite different method. The calculation was performed on the conditions of suction flow rate $dQ=0.0$ and $dQ=0.02$ for the only case of Reynolds number $Re=160$ and expansion ratio $(H+2h)/H=2.0$ (H being channel width in the upstream of step and h being the step height). In this report, from the calculation results, the behaviors of flow pattern, the contours and vector distribution of pressure gradient with passage of time were presented. In addition, the convergence process in the steady state of flow was shown and was discussed for the convergence criterion in a steady state was satisfied.

Key Words: Laminar Separated Flow, Numerical Study, Expansion Channel Flow, Navier-Stokes Equation, Finite Difference Method, Flow Pattern, Pressure Gradient.

1. ま え が き

急拡大流路内流れは、流れの剥離・再付着を伴う典型的な流れ場であり、流体力学の基礎として、また工学的応用面においても重要であることから、これに関する研究は多い^{1)~4)}。したがって、層流の場合のこの流れ場は比較的明らかにされている。一方、i) 二次元流路内の流れであってもステップ下流の流れは定常な三次元性を示す剥離流となる^{5,6)}、ii) ステップ下

流の剥離循環渦に二次流が存在する^{1)~3)}、iii) 幾何学的に対称な拡大流路でありながらある Re 数で対称流れは不安定となり上下壁ステップに形成される剥離循環渦領域の異なる定常非対称流れを形成し、つづいてその流れは三次元性を示す非対称流れへと移行することが実験事実として知られている^{7)~9)}、などいくつかの問題に対してはまだ共通する明確な解釈はないように思える。著者らはこれまでにこの種の流れ場を、主にナビエ・ストークス方程式を数値的に解いて調べて

* 広島工業大学機械工学科

** 広島工業大学大学院工学研究科機械システム工学専攻

きたが^{10,11)}、これらに関する決定的な結論を得るまでにはいたっていない。

そこで本論文では、ステップ下流に弱い吸い込みを与えることによって、そこでの圧力勾配を変化させ、それにより非対称剥離流れをつくり調べることを試みたものである。特に、収束過程の流れパターンおよび圧力勾配分布の時間挙動に注目して調べ、可能な範囲でそれらを図示した。また、剥離・再付着を伴うこの種の流れ場に対する数値解に関して考察し一つの見解を述べた。

2. 基礎方程式と計算モデル

流れを記述する方程式は2次元のナビエ・ストークス方程式と連続の式である。本論文の計算では、これに渦度 ω ($\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$) と流れ関数 ϕ ($u = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$) を導入した渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \phi \quad (2)$$

ここで、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

を用いる。ここで上記の(1)、(2)の方程式は代表速度を流路断面平均流速 U 、代表寸法をステップ上流の流路幅 H 、代表時間を H/U に選んだ無次元表示である。また、 Re は $Re = UH/\nu$ (ν は動粘性係数) で定義されるレイノルズ数である。これらを差分法(差分式は時間について前進差分、空間については中心差分とした)で解き流れを調べる。

計算モデルは Fig. 1 に示すように既報^{10,11)} と同様で上壁と下壁とに高さ h の後ろ向きステップを持

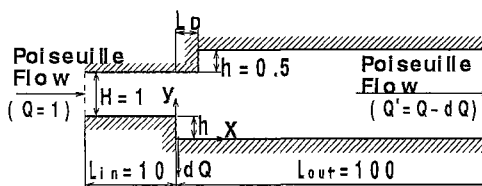


Fig. 1 Computational model

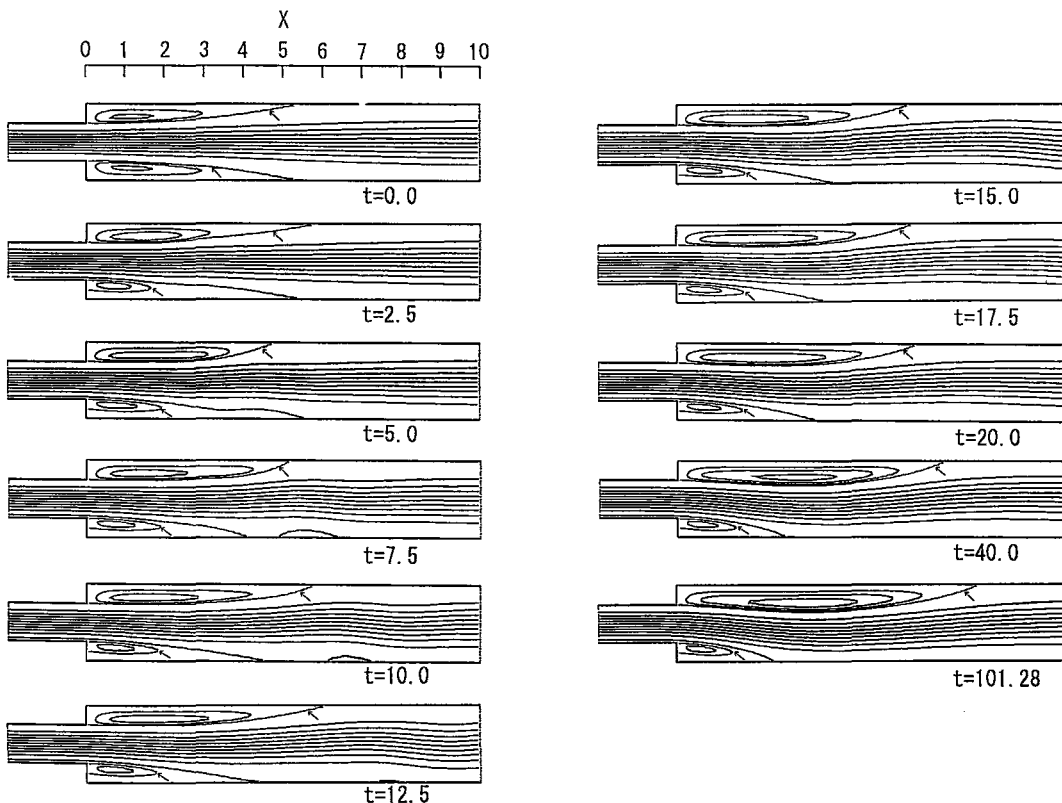


Fig. 2 Variation of stream line with passage of time.
($Re=160$, $dQ=0.02$)

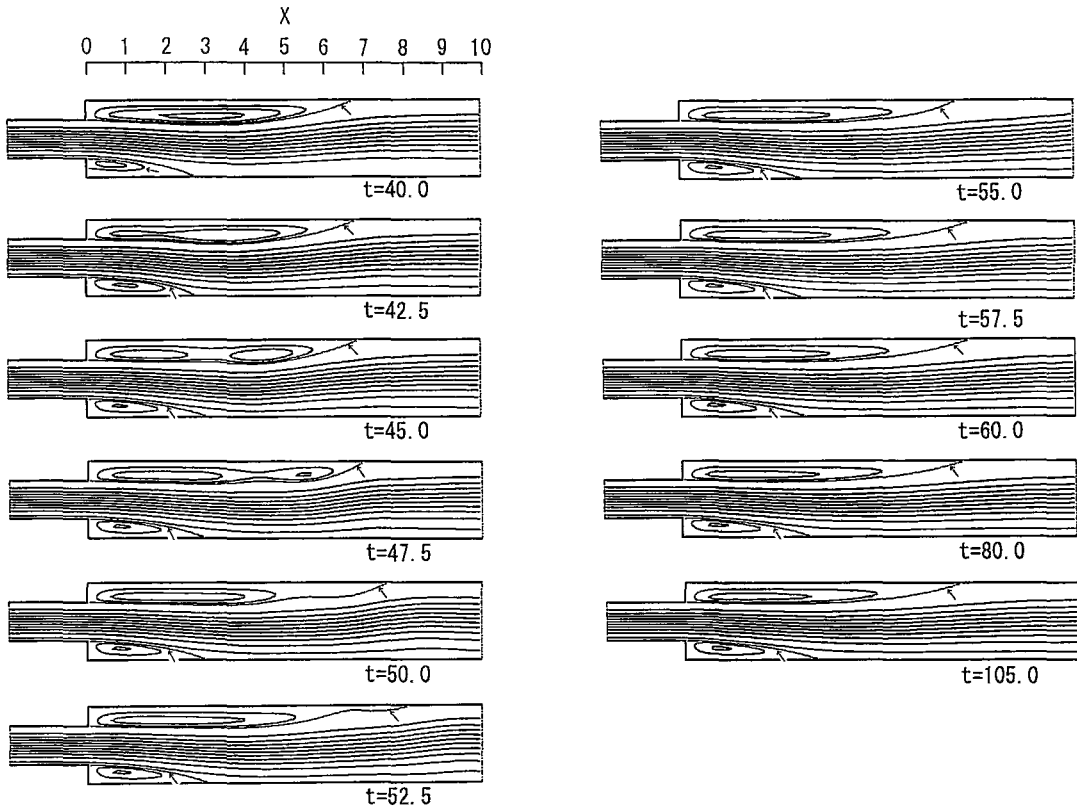


Fig. 3 Variation of stream line with passage of time.
($Re=160, dQ=0.02$; from $t=0$ till $t=40, dQ=0.0$; after $t=40$)

つ2次元流路であるが、これに下壁ステップ下端で吸い込みを与えたものである。また、本論文ではステップのずれ間隔のない ($L_D=0$) 対称流路についてのみ調べる。座標は下壁ステップ下端を原点とし、流れ方向に x 、断面方向に y とする。

境界条件は

- i) 流路入口および出口で2次元ポアズイユ流(ただし、流路入口では流量 $Q=1$ に対する、流路出口では流量 $Q'=Q-dQ$ に対するものとする)とし、ディレクレ形境界条件で与える、
 - ii) 壁で流れはすべり無し、
- とした。下壁ステップ下端での吸い込み口の幅 Δs ($\Delta s=2\Delta x$ とした) は極めて小さいので、ここでの流速は y 方向成分 v のみとし、またその分布は一様であると仮定した。($2\Delta x$ 間で ψ の値は $\psi=0$ から $\psi=dQ$ へ直線的に変化する)。この仮定によりステップ下流の流れの本質は変わらないものとする。

計算は、 $Re=160$ 、吸い込み流量 $dQ=0, 0.02$ 、ステ

ップのずれ間隔 $L_D=0.0$ について実行した。また、計算は $dQ=0.02$ で収束解に至るまで計算した場合、収束解を得る途中で吸い込みを止めた場合についての計算に対する時間挙動の2つのケースについて実行した。

3. 結果と考察

3.1 流れパターン

Fig. 2 は、 $Re=160$ の流れを初期値として、これに $t=0.0$ でステップ下壁下端に吸い込み流量 $dQ=0.02$ の弱い攪乱を与えた場合の流れの時間変化の様子を示したものである。図の流線は ψ の値を0.1間隔で示している(但し、剥離循環渦領域は、0.01間隔で示している)。また図中の矢印は、剥離流線 $\psi=0.0$ および $\psi=1.0$ を示す。図から、上壁側の剥離渦は時間の経過とともに発達し下流へと伸びる。これに対し下壁側の流れパターンは若干複雑な時間変化を示す。下壁への付着流線 $\psi=0.02$ に着目すると、

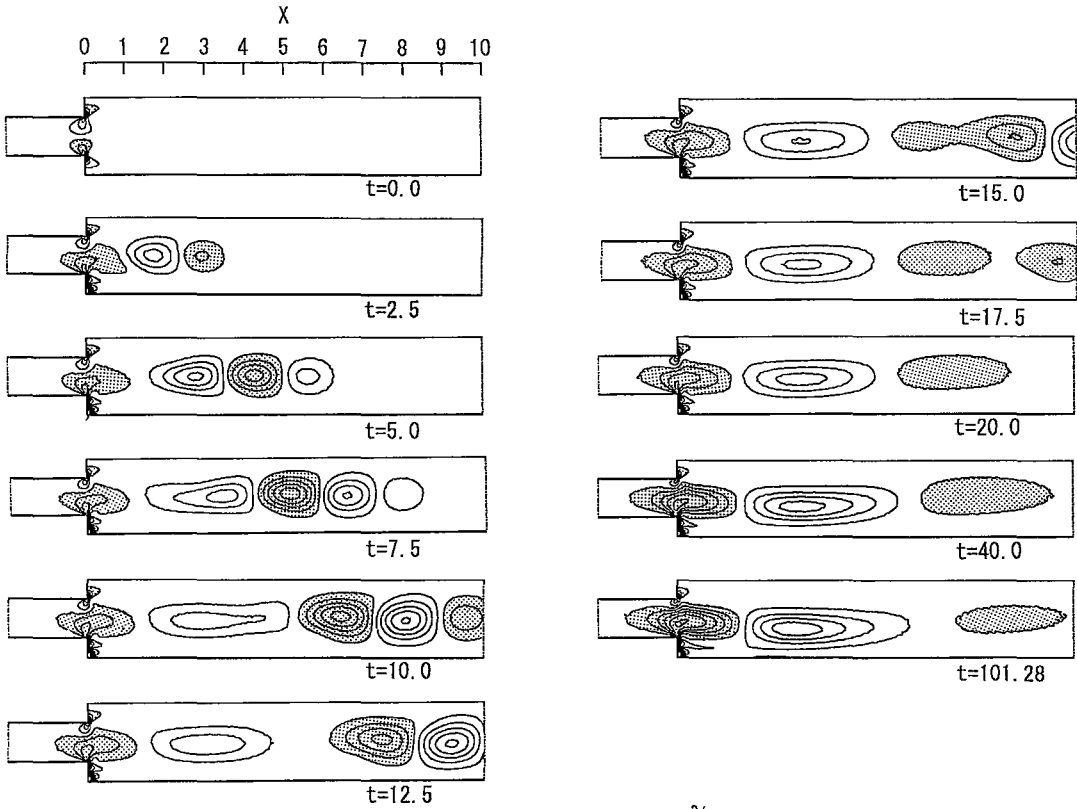


Fig. 4 Variation of contours of pressure gradient $Re \frac{dp}{dy}$ with passage of time. ($Re=160, dQ=0.02$)

i) $t \leq 2.5$ で付着点位置は上・下壁でほぼ同じ, ii) $t=5.0$ で流線は凹分布, iii) $t=7.5$ で流線は分離し, 剥離泡を形成, iv) 剥離泡は時間経過とともに減衰し, $t \approx 13$ で消滅, のように初期の段階 $t \approx 13$ までは複雑な時間挙動を示す。その後流れの変化は少なく, 特に $t > 20$ では極めてゆっくりと $t \approx 100$ の収束解である上下非対称の流れパターンへと漸近する。Fig. 3 は, Fig. 2 の $t=40.0$ で突然に吸い込みを止めた場合についての流れパターンの時間変化を示したものである。吸い込みを止めた直後の流れパターンをみると ($t=42.5$), 下壁側は, $\psi=0.02$ の付着点とほぼ同じ位置が剥離流線 $\psi=0$ の再付着点となる循環渦を形成している。これに対し上壁側は, 剥離循環渦内に2つの渦中心をもつ渦パターンへと変化している。 $t > 42.5$ では, 下壁側の渦はさほど大きな変化は示さないが, 上壁側の渦パターンは時間の経過とともに上流側の渦が発達しそれとともに下流側の渦は減衰, 消滅し, $t=57.5$ で安定した1渦中心形の剥離循環渦

を形成する。 $t > 57.5$ での上壁側の渦パターン変化は収束解に近い極めてゆっくりとした挙動を示している。(この $Re=160$ の場合の流れは, 初期値に対称な流れを用いて計算すると, やはり対称な流れとなる結果を得ている。この観点からすると, ここで示した結果は, 解の一意性に関する問題を含んでおり興味ある重要な問題であるが, ここではこれについてはふれない)。

3.2 等圧力勾配分布

Fig. 4 は Fig. 2 で示した流れパターンの時間変化に対応する等圧力勾配分布 ($Re \frac{dp}{dy}$ についてのみ示す) の時間変化を示したものである (同様に, Fig. 5 は Fig. 3 に対応するものである)。等圧力勾配線の値は $\left| Re \frac{dp}{dy} \right|$ の値を2から4間隔で示しており, 領域中央ほど大きな値となる。また, 図中の網掛けを施した領域は $-\frac{dp}{dy} < 0$ の領域を示している。図から, 吸い込みによる下向きの圧力 ($-\frac{dp}{dy} < 0$) がステップ角近傍におよんでいる。この領域の下流では上向きの圧力傾

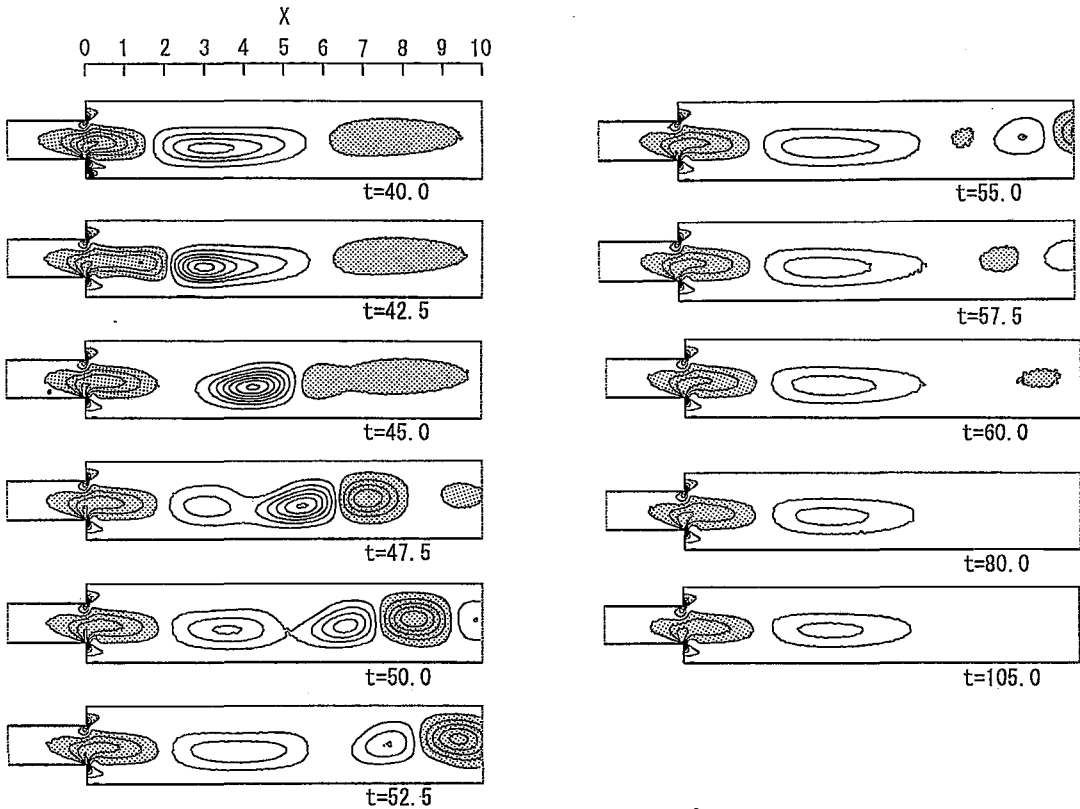


Fig. 5 Variation of contours of pressure gradient $Re \frac{dp}{dy}$ with passage of time.
 ($Re=160, dQ=0.02$; from $t=0$ till $t=40, dQ=0.0$; after $t=40$)

域さらに下流では再度下向きの圧力領域がみられる。この上・下交互に働く圧力領域は時間の経過とともに下流へと広がり、やがて $t \approx 100$ の収束解の圧力勾配分布へと漸近してゆく。ここで示した圧力勾配分布図と Fig. 2 の流線とを対応させてみると、圧力の作用する方向に流線が曲げられる流れパターンを示していることがわかる。Fig. 4 と同様に、Fig. 3 で示した流れパターンの場合についても、Fig. 5 に示しておく。また、これら2つのケースの流れパターン (Fig. 2; $dQ=0.02$ で $t \approx 100$ の収束解と Fig. 3; $dQ=0.0$ で $t \approx 100$ の収束解) についての圧力勾配ベクトル分布を Fig. 6(a) および Fig. 6(b) に示す。図から、前述した流れパターンと圧力の働く方向との関連がさらに見られる。すなわち、主流中の流線の蛇行には上・下方向の圧力 ($\frac{\partial p}{\partial y}$) が影響すること、また剥離循環渦領域内では逆圧力勾配が働いており、このことから、 $\frac{\partial p}{\partial x}$ が再付着点距離に与える影響は大きいと推測される。

3.3 再付着点距離の時間変化

循環渦領域の時間変化を Fig. 7 に示す。図から、流れパターンでみたように (Fig. 2, 3 参照), $t < 20$ で渦領域 x_R/h の値の変化は大きい。 $t \geq 20$ ずでは x_R/h の値は収束解の値へと漸近してゆくが、下壁の方が早く収束する結果となっている。 $t=40$ で突然 $dQ=0$ とした場合 (図中の○印) についてみると、 $dQ=0$ とした直後の時間領域をのぞいて x_R/h の変化はゆるやかである。このことは $t \geq 60$ の領域では収束の判定条件如何で収束解と判定される可能性がある。この様な解の一意性が確定されていない流れ場や変化の極めてゆっくりとした流れにおける収束条件の与え方には一考の余地があると考えられる。

3.4 $\Delta\omega$ 分布の時間変化

流れの収束過程を計算全領域について調べた。Fig. 8 は $\Delta t=0.005$ 間の渦度変化 $\Delta\omega = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$ の分布を示したもので、時刻 $t=12.5, 60, 101.28$ を選んで示した。図中の網掛け■は $\Delta\omega > 1.0 \times 10^{-3}$,

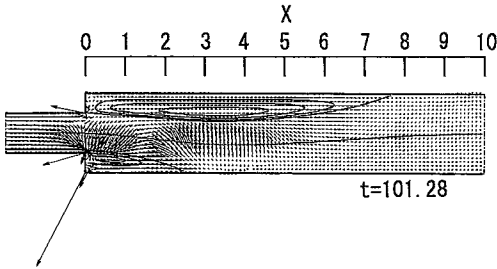


Fig. 6(a) Distribution of pressure gradient vector at $t=101.28$. ($Re=160, dQ=0.02$)

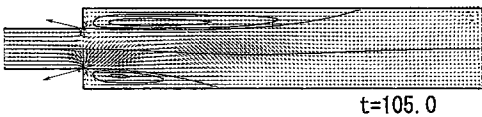


Fig. 6(b) Distribution of pressure gradient vector at $t=105.0$. ($Re=160, dQ=0.02$; from $t=0$ till $t=40, dQ=0.0$; after $t=40$)

☒は $1.0 \times 10^{-3} > \Delta\omega > 1.0 \times 10^{-4}$, ☑は $1.0 \times 10^{-4} > \Delta\omega > 1.0 \times 10^{-5}$, □は $\Delta\omega < 1.0 \times 10^{-5}$ を示す。図から、ステップ近傍が収束が遅い事が分かる。特に流線が蛇行する部分の収束が最も遅い。この領域では前述したように、流線を曲げるための力 $\frac{\partial p}{\partial y}$ が存在する、すなわち $Re \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\partial \omega}{\partial x}$ が強く存在する領域であることから $\Delta\omega \rightarrow 0$ が遅くなると理解できる。Fig. 9 は、

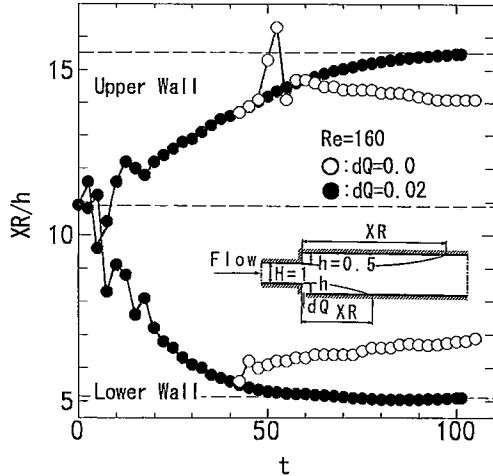


Fig. 7 Variation of reattachment length with passage of time.

Fig. 8 と同様に、 $t=40$ で突然 $dQ=0$ とした場合について示した $\Delta\omega$ 分布図である。図から $\Delta\omega$ は全領域に広がっている。ある時刻までは時間の経過とともに下流方向から収束してゆき、一方ステップ近傍は $\Delta\omega$ の値は必ずしも小さくならない。収束直前の時刻では前述したようにステップ近傍の流線が蛇行する領域で $\Delta\omega$ が残るのみとなる。これらの結果から、剥離・再付着の共存するこのような流れ場の収束の判定条件は全領域での $\Delta\omega$ についての数居値 $\frac{1}{n \times m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta\omega_{ij} \leq \epsilon$ とする判定条件より、予備的計算より判断し

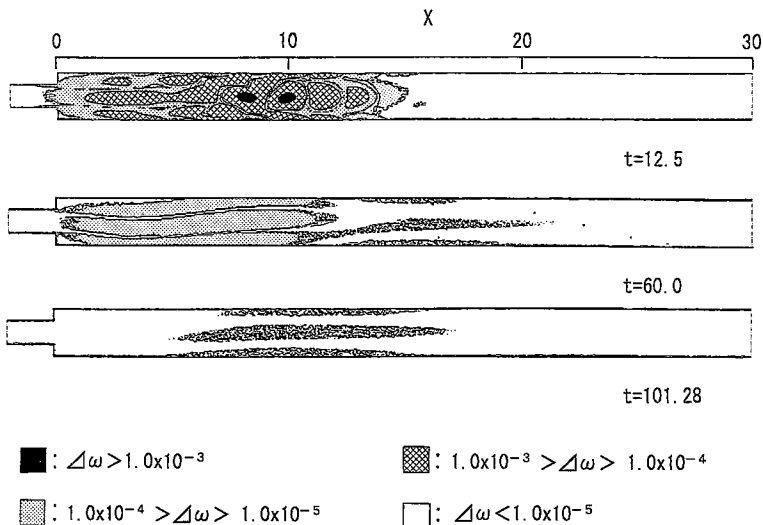


Fig. 8 Distribution of contours of vorticity difference $\Delta\omega = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$ at $t=12.5, 60.0$ and 101.28 . ($Re=160, dQ=0.02$)

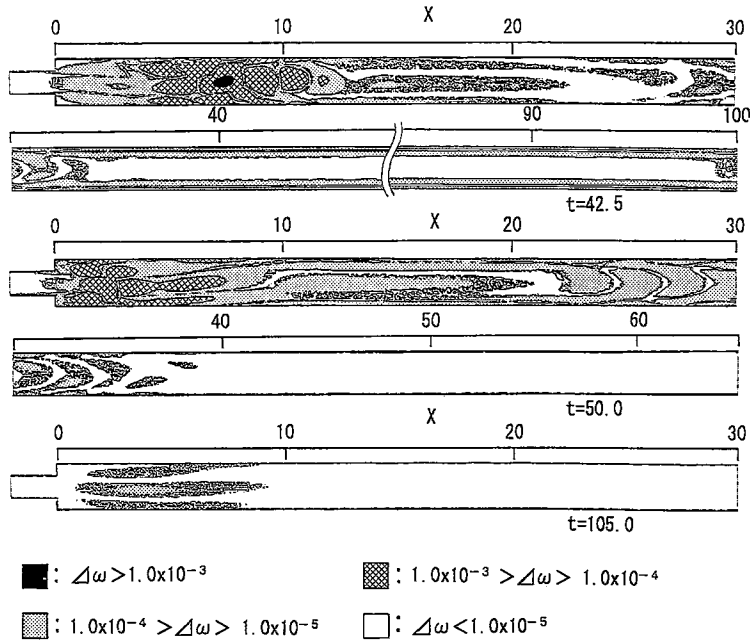


Fig. 9 Distribution of contours of vorticity difference $\Delta\omega = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$ at $t=42.5, 50.0$ and 105.0 . ($Re=160, dQ=0.02$; from $t=0$ till $t=40, dQ=0.0$; after $t=40$)

た流れの収束の遅い（例えば流線曲率の大きい領域）数点を代表点を選んだチェックポイントで判定する方が良い結果を与えると考えられる。

4. ま と め

上述した計算結果をまとめると、

- (1) 下壁ステップ下端に吸い込み流量 $dQ=0.02$ を与えた場合の上壁側の剥離渦は時間の経過とともに発達し下流へと伸びる。これに対し下壁側のそれは若干複雑な時間変化を示す。 $t>20$ では極めてゆっくりと $t=100$ の収束解である上下非対称の流れパターンへと漸近する。
- (2) $t=40.0$ で突然に吸い込みを止めた場合、下壁側の渦はさほど大きな変化は示さない。これに対し上壁側のそれは時間の経過とともに2つの渦中心をもつ渦パターンに変化し、その後1渦中心形の渦パターンへと変化する。 $t>57.5$ での渦パターン変化は極めてゆっくりとした挙動を示している。
- (3) 主流中の流線の蛇行には上・下方向の圧力 $\frac{\partial p}{\partial y}$ が影響すること、また $\frac{\partial p}{\partial x}$ が再付着点距離に大きな影響を与えていることが推測される。
- (4) x_R/h の値は時間の経過とともに収束解の値へと漸近してゆく。上壁と下壁とを比較すると、下壁の

方が早く収束する結果となっている。

- (5) 流れの収束過程を $\Delta\omega$ でみると、ステップ近傍の収束が遅いことがわかる。特に流線が蛇行する部分の収束が最も遅い。
- (6) 剥離・再付着の共存するこのような流れ場の収束の測定条件は全領域での $\Delta\omega$ についての数居値 $\frac{1}{n \times m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta\omega_{ij} \leq \epsilon$ とする判定条件より、予備的計算より判断した流れの収束の遅い（例えば流線曲率の大きい領域）数点を代表点を選んだチェックポイントで判定する方が良い結果を与えると考えられる。

文 献

- 1) Abbot, D. E. and Kline, S. J., "Experimental investigations of subsonic Turbulent flow over single and double backward-facing steps.", Trans. ASME. J. Basic Eng., Vol. 84, (1962), 317.
- 2) Goldstein, R. J., Eriksen, V. L., Olson, R. M. and Eckert, E. R. G., "Laminar separation, reattachment, and transition of the flow over a downstream-facing step.", Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 92, (1970), 732.

- 3) Denham, M. K. and Patrick, M. A., "Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel.", *Trans. Instn Chem. Engrs.*, Vol. 52, (1974), 361.
- 4) Bradshaw, P. and Wong, F. Y. F., "The reattachment and relaxation of a turbulent shear layer.", *J. Fluid Mech.*, Vol. 52, (1972), 113.
- 5) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F. and Shonung, B., "Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow.", *J. Fluid Mech.*, Vol. 127, (1983), 473.
- 6) Kaiktsis, L., Karniadkis, G. E. and Orszag, S. A., "Onset of threedimensionality, equilibria, and early transition in flow over a backward-facing step.", *J. Fluid Mech.*, Vol. 231, (1991), 501.
- 7) Sobey, I. J., "Observation of waves during oscillatory channel flow.", *J. Fluid Mech.*, Vol. 151, (1985), 395.
- 8) Shapira, M., Degani, D. and Weihs, D., "Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarged channels.", *Computers and Fluids*, Vol. 18, No. 3, (1990), 239.
- 9) Cherdron, W., Durst, F. and Whitelaw, H. J., "Asymmetric flows and instabilities in symmetrical sudden expansion.", *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, (1974), 111.
- 10) 桜井, 中西, 大坂, "非対称拡大流路内流れの数値的研究", *機械学会中・四国支部・第30回講演論文集*, No. 925-1, (1992), 59.
- 11) Nakanishi, S., Sakurai, M. and Osaka, H., "Numerical study on two-dimensional expansion channel flow-Asymmetric flow-", *Proc. 2nd JSME-KSME Thermal Eng. Conference*, Vol. 1, (1992), 59.