

# 層流における後ろ向きステップ流れの数値実験

(鋭い角の境界条件について)

中西 助次\*・大坂 英雄\*\*

(昭和62年9月24日受理)

## Numerical Study on the Laminar Flow over a Backward Facing Step

(On the Boundary Condition at the Convex Sharp Corner)

Suketsugu NAKANISHI\* and Hideo OSAKA\*\*

(Received Sept. 24, 1987)

The specification of computational boundary conditions at the convex sharp corner requires special considerations, and is an important problem for the accuracy of the numerical solution. In this paper, this problem is treated numerically by the use of finite difference method for the stream-function vorticity equations. Seven different methods on the specification of the vorticity at the convex sharp corner, which were examined by P. J. Roache and T. J. Mueller, are reconsidered on the laminar flow over a backward facing step in the two-dimensional channel. The consideration for the each methods and the check of the results for the each methods were made on the length of recirculation zone, the separation point of flow and the position of vortex center.

**Key Words:** Fluid dynamics, Numerical method, Computational fluid dynamics, Separation point, Laminar flow, Boundary condition, Backward facing step flow.

### 1. はじめに

Navier-Stokes の方程式を数値的に解く場合、その境界条件の取扱いは重要な問題の一つである。特に、角のある物体廻りの流れで、角での境界条件は解の正確度の側面から特別な配慮が必要となる。角における境界条件は、A. Thom & C. J. Apelt<sup>1)</sup>, M. Kawaguti<sup>2)</sup>, P. J. Roache & T. J. Mueller<sup>3), 4)</sup> などによって、早くから取扱われている。しかし、それらを系統的に始めて吟味したのは P. J. Roache & T. J. Mueller<sup>3), 4)</sup> である。

いま、流れを記述する方程式を、Navier-Stokes の方程式に渦度と流れ関数を導入して得られる渦度輸送方程式(2次元)を考える。この場合の角での流れ関数に関する境界条件は、静止壁が非浸透性であれば問題はなく、他の個体壁と同様に一定の流れ関数の値を与えればよい。渦度の対流と拡散の様相を決定する渦度輸送方程式は、領域内部点ではその全体量は保存されるが、“すべりなし”の境界では渦度の生成がある。実は問題を駆動するのは、壁面(すべりなし)で生成する渦度の拡散とそれともなう対流に他ならない。したがって、角の渦度の取扱いは最も重要となる。

\* 物理学教室

\*\* 山口大学工学部

P. J. Roache はこの取扱いについて7つの方法を提案し、Reynolds 数  $Re=10$  の境界層における後ろ向きステップ流れについて調べた。その結果、Reynolds 数の大きい場合には、いずれの方法にも大差はないと述べているが<sup>4)</sup>、流路内流れ（内部問題）においても同様なことが言えるかどうかは疑問である。また、Reynolds 数の大きい方がむしろ、角の境界値の設定いかんが数値解の正確度に大きな影響をおよぼすように思われる。

最近、C. Shen & J. M. Floryan は<sup>5)</sup>、キャビティをもつ流路の低 Reynolds 数 ( $Re < 1$ ) 流れで、角の渦度を直接使用しない方法を用いたが、高 Reynolds 数に適用できるかどうか分からない。

そこで、テスト問題として、GAMM-workshop で決められた<sup>6)</sup>、後ろ向きステップをもつ2次元流路内流れを選び、P. J. Roache らの調べた7つの方法を、Reynolds 数  $Re=50\sim 200$  の範囲で再度調べた。解の吟味はステップ下流に形成される循環渦の長さおよび渦の中心等を他の結果と比較することにより行なった。

## 2. モデルと基礎方程式

流れを記述する方程式は、Navier-Stokes の方程式

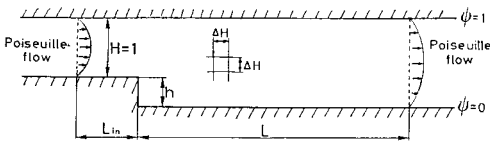


図1 計算モデル

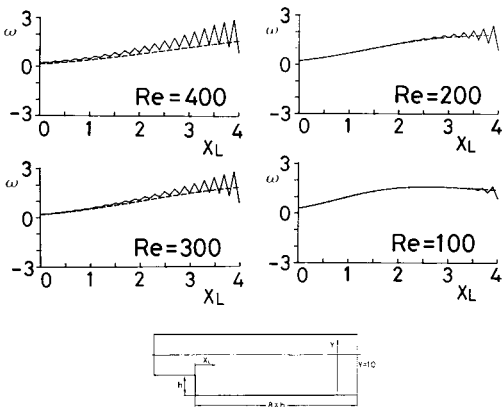


図2 境界での離散誤差の影響（渦度分布）  
 $L=4$  の場合の  $\omega$  の分布曲線（—）  
 $L=22$  の場合の  $\omega$  の分布曲線（---）  
 $y=1.0$  の位置（-----挿入図）

と連続の式である。これらに、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

で定義される流れ関数  $\psi$  と渦度  $\omega$  を導入して得られる

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (3)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (4)$$

渦度輸送方程式とする。ここで、方程式(1)~(4)は、代表速度を平均流速  $U$ 、代表長さを流路幅  $H$  に選んだ無次元表示であり、 $Re$  は  $Re = UH/\nu$  で定義される Reynolds 数である。この方程式(3)、(4)を有限差分法で数値的に解き流れを求める。

計算モデル流路の幾何学的形状は GAMM-workshop で決められた  $h_s = h/H = 0.5$  のものを選んだ（図1参照）。また、流入境界からステップまでの距離  $L_{in} = 3$ 、そして、ステップから流出境界までの距離  $L$  は流出境界の離散誤差が内部におよばない領域となるよう予備計算を行い決定した。

図2と図3はその一例を示したものである。図2の実線は  $L = 8 \times h_s = 4$ 、点線は  $L = 22$  とした場合の

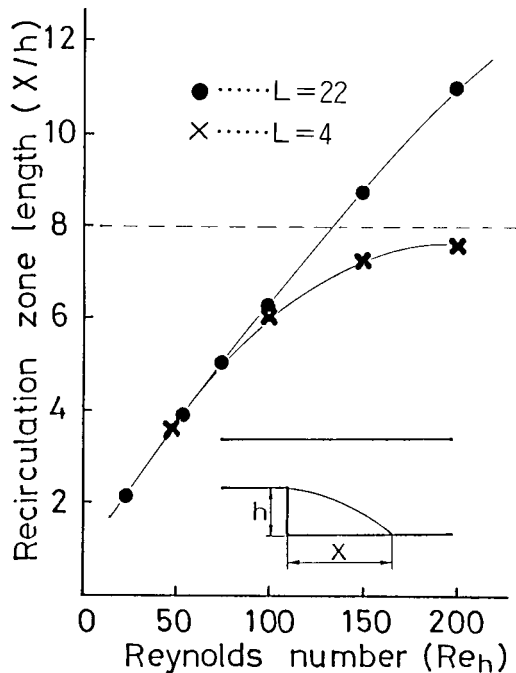


図3 下流境界が循環渦におよぼす影響

$y=1.0$  での渦度  $\omega$  の分布を示す。 $L$  が短いと流出境界での離散誤差が内部におよぶことが分かる。図3はステップ下流に形成される循環渦領域の長さ(以下、渦の長さと呼ぶ)を示したものである。図から、 $L$  は渦の長さ  $x/h$  の2倍以上の値とする必要があることがわかる。

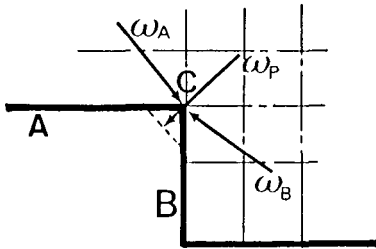
したがって、 $L$  の値は、 $Re < 50$  のとき  $L=15$ ,  $Re = 100 \sim 200$  のとき  $L=31$  とした。

### 3. 境界条件

境界条件は、流路壁で“すべりなし”，流入および流出境界で十分発達した流れ(2次元 Poiseuille 流)とした。

ステップ角での渦度の境界条件の取扱いは、P. J. Roache らと同様の7つの方法を用いる(図4参照)。その7つの方法は<sup>3),4)</sup>

- i) 上流壁  $A$  の極限として得られる渦度  $\omega_A$  と下流壁  $B$  の極限として得られる渦度  $\omega_B$  の平均値を角の渦度  $\omega_C = \frac{1}{2}(\omega_A + \omega_B)$  の1価として与える壁面での平均法……Model 0,
- ii) M. Kawaguti が導出したもので、流れ関数が角  $C$  で対称であることを仮定した、点  $C$  に対する流れ関数対称法(1価)……Model 1,
- iii) 上流壁極限の渦度  $\omega_A$  を角の渦度  $\omega_C = \omega_A$  とする上流壁の値による法(1価)……Model 2,
- iv) 角の点が  $45^\circ$  の壁と仮定して、角の渦度  $\omega_C$  を決定する  $45^\circ$  の壁を使う法(1価)……Model 3,
- v) 角での剥離を予想し、点  $C$  の位置で剥離を生じさせる試み、 $\omega_C = 0$  とした  $\omega_C$  の剥離値法(1価)……Model 4,



- Model 0 壁での平均値法(1価)  $\omega_C = (\omega_A + \omega_B)/2$
- Model 1 点  $C$  に対する  $\psi$ -対称法(1価)
- Model 2 上流壁の値( $\omega_A$ )による法(1価)
- Model 3  $45^\circ$  の壁を使う法  $\omega_p$ (1価)
- Model 4  $\omega_C$  の分離法、 $\omega_C = 0$ (1価)
- Model 5  $\omega_B$  の分離法、 $\omega_B = 0$ ,  $\omega_A$ (2価)
- Model 6 不連続法、 $\omega_A$ : 上流,  $\omega_B$ : 下流(2価)

図4 角での渦度モデル

vi) ステップ上方側の差分式には  $\omega_C = \omega_A$  を使い、ステップ下流側の差分式には  $\omega_C = \omega_B = 0$  とする  $\omega_B$  の剥離値法(2価)……Model 5,

vii) ステップ上方側の差分式には  $\omega_C = \omega_A$ , ステップ下流側の差分式には  $\omega_C = \omega_B$  を用いる不連続値法(2価)……Model 6

である。

### 4. 結果

計算は各モデルについて、 $Re = 50, 100, 200$  について行なった。計算に用いた格子間隔は  $\Delta x = \Delta y = 1/10$  の正方向格子とした。また、 $Re = 100$  については  $\Delta x = \Delta y = 1/20$  についても計算し、格子間隔による影響も調べた。

#### (1) 各モデルについての流線図

図5は、各モデルについて得られた計算結果の内、 $Re = 100$  を選んで示した流線図である。

図から、格子間隔  $\Delta x = \Delta y = 1/10$  の計算結果はモデルによる差が顕著に表われていることが分かる(図5(a)参照)。Model 0, 1, 2 および3はある程度の流れを表現しているが、P. J. Roache も述べているように<sup>4)</sup>, Model 4, 5(角で剥離を生じさせる試み)は流れを表現していない。それどころか、角での剥離さえうまく行なわれていない。Model 6 は A. Thom & C. J. Apelt (1961)<sup>1)</sup> の用いた方法であるが、循環渦の

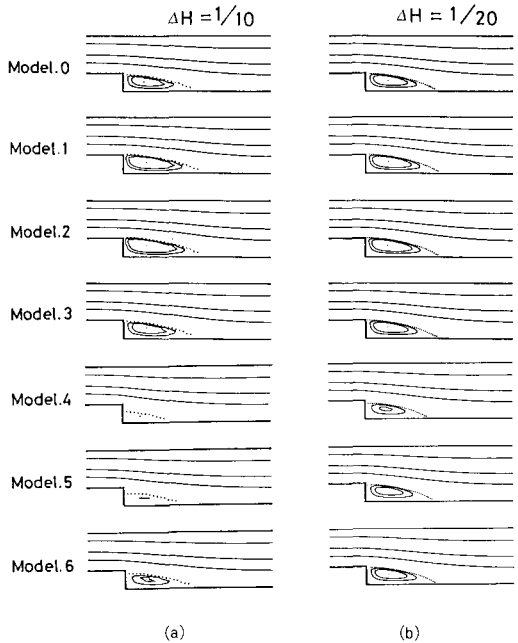


図5 流線 ( $Re = 100$  の場合)

形状から判断して、流れを十分に表現していない。ある程度の流れを表現している、Model 0~3 の内、Model 0 と 3 は良く一致し、M. Kawaguti が使用している Model 1 と Model 2 は一致している。図 5 (b) は  $\Delta x = \Delta y = 1/20$  についての計算結果である。格子間隔を細かくすることによりモデルの違いによる差を小さくすることができる。詳細に見れば、Model 4, 5 は依然として流れを表現していないと思われる(剝離点の位置が深く、また、渦の長さも短い)。

(2) 各モデルについての渦の長さ、剝離点および渦の中心

表 1 は、それぞれのモデルおよび Reynolds 数についての計算結果を、渦の長さ  $x/h$ 、剝離点  $h_0/h$  およ

び渦中心  $(x_0/h, y_0/h)$  について整理したものである。

Model 0 を基準にして、各モデルの渦の長さを比較する。Model 1, 2, 3 は Model 0 と比較して、その値は大きい。また、Reynolds 数の増加とともにモデル間の差がなくなる。Model 3 は Model 0 と最も一致しており、相対誤差 0.6~4% の範囲内にある。Model 4, 5, 6 は Model 0 と比較してその値は小さい。特に、Model 4, 5 は Model 0 に対し、相対誤差 22~47% も小さい値である。格子間隔を 1/20 にすると、モデル差による  $x/h$  の違いは数% の範囲にとどまる。したがって、十分細かい格子間隔であれば、どのモデルを用いても、ステップ後流の渦の長さは評価できると判断する。

表 1 各モデルの計算結果

|   | $R_e=50 (R_{eh}=25)$         | $R_e=100 (R_{eh}=50)$ | $R_e=200 (R_{eh}=100)$ | $R_e=100 (R_{eh}=50)$        |                  |
|---|------------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------------|------------------|
| 0 | 2.18                         | 3.66                  | 6.26                   | 3.78                         | $x/h$            |
|   | 0.855                        | 0.833                 | 0.860                  | 0.917                        | $h_0/h$          |
|   | (0.8, 0.6)                   | (1.2, 0.5)            | (2.1, 0.6)             | (1.15, 0.67)                 | $(x_0/h, y_0/h)$ |
| 1 | 2.46<br>(12.8%)              | 4.03<br>(10.1%)       | 6.73<br>(7.5%)         | 3.94<br>(4.2%)               | $x/h$            |
|   | 0.865                        | 0.840                 | 0.970                  | 0.921                        | $h_0/h$          |
|   | (0.8, 0.6)                   | (1.2, 0.6)            | (2.0, 0.6)             | (1.18, 0.69)                 | $(x_0/h, y_0/h)$ |
| 2 | 2.50<br>(14.7%)              | 4.14<br>(13.1%)       | 6.89<br>(10.0%)        | 3.96<br>(4.7%)               | $x/h$            |
|   | 0.866                        | 0.841                 | 0.864                  | 0.922                        | $h_0/h$          |
|   | (0.8, 0.6)                   | (1.3, 0.6)            | (2.2, 0.6)             | (1.2, 0.69)                  | $(x_0/h, y_0/h)$ |
| 3 | 2.27<br>(4.1%)               | 3.71<br>(1.3%)        | 6.30<br>(0.6%)         | 3.81<br>(0.7%)               | $x/h$            |
|   | 0.857                        | 0.831                 | 0.860                  | 0.918                        | $h_0/h$          |
|   | (0.8, 0.6)                   | (1.2, 0.5)            | (2.1, 0.6)             | (1.16, 0.67)                 | $(x_0/h, y_0/h)$ |
| 4 | 1.14<br>(47.7%)              | 2.30<br>(37.2%)       | 3.78<br>(39.6%)        | 3.33<br>(12.0%)              | $x/h$            |
|   | 0.870                        | 0.596                 | 0.960                  | 0.813                        | $h_0/h$          |
|   | (0.6, 0.2)                   | (0.9, 0.2)            | (1.2, 0.4)             | (1.08, 0.59)                 | $(x_0/h, y_0/h)$ |
| 5 | 1.70<br>(22.0%)              | 2.85<br>(22.0%)       |                        | 3.66<br>(3.2%)               | $x/h$            |
|   | 0.830                        | 0.635                 | 収束解が得られない              | 0.874                        | $h_0/h$          |
|   | (0.6, 0.4)                   | (1.1, 0.3)            |                        | (1.16, 0.64)                 | $(x_0/h, y_0/h)$ |
| 6 | 2.04<br>(6.4%)               | 3.41<br>(6.8%)        | 5.70<br>(8.9%)         | 3.76<br>(0.5%)               | $x/h$            |
|   | 0.835                        | 0.804                 | 0.835                  | 0.905                        | $h_0/h$          |
|   | (0.8, 0.4)                   | (1.2, 0.5)            | (1.6, 0.8)             | (1.16, 0.66)                 | $(x_0/h, y_0/h)$ |
|   | $\Delta x = \Delta y = 1/10$ |                       |                        | $\Delta x = \Delta y = 1/20$ |                  |

( ) の数字は Model 0 との相対誤差を示す。

表2 実験結果

|                                         | $Re=68 (Re_h=34)$ | $Re=80 (Re_h=40)$           | $Re=200 (Re_h=100)$         |                  |
|-----------------------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------|
| <i>Author</i> <sup>10)</sup>            |                   | 3.12<br>{3.09}              |                             | $x/h$            |
|                                         |                   | 0.97<br>{0.83}              |                             | $h_0/h$          |
|                                         |                   | (1.12, 0.6)<br>{(1.0, 0.6)} |                             | $(x_0/h, y_0/h)$ |
| <i>J. L. Kuewy et al.</i> <sup>6)</sup> | 3                 |                             | 6.2<br>{6.26}               | $x/h$            |
|                                         |                   |                             |                             | $h_0/h$          |
|                                         | (0.8, 0.6)        |                             | (2.2, 0.68)<br>{(2.1, 0.6)} | $(x_0/h, y_0/h)$ |

{ } の数字は数値解の結果を示す。

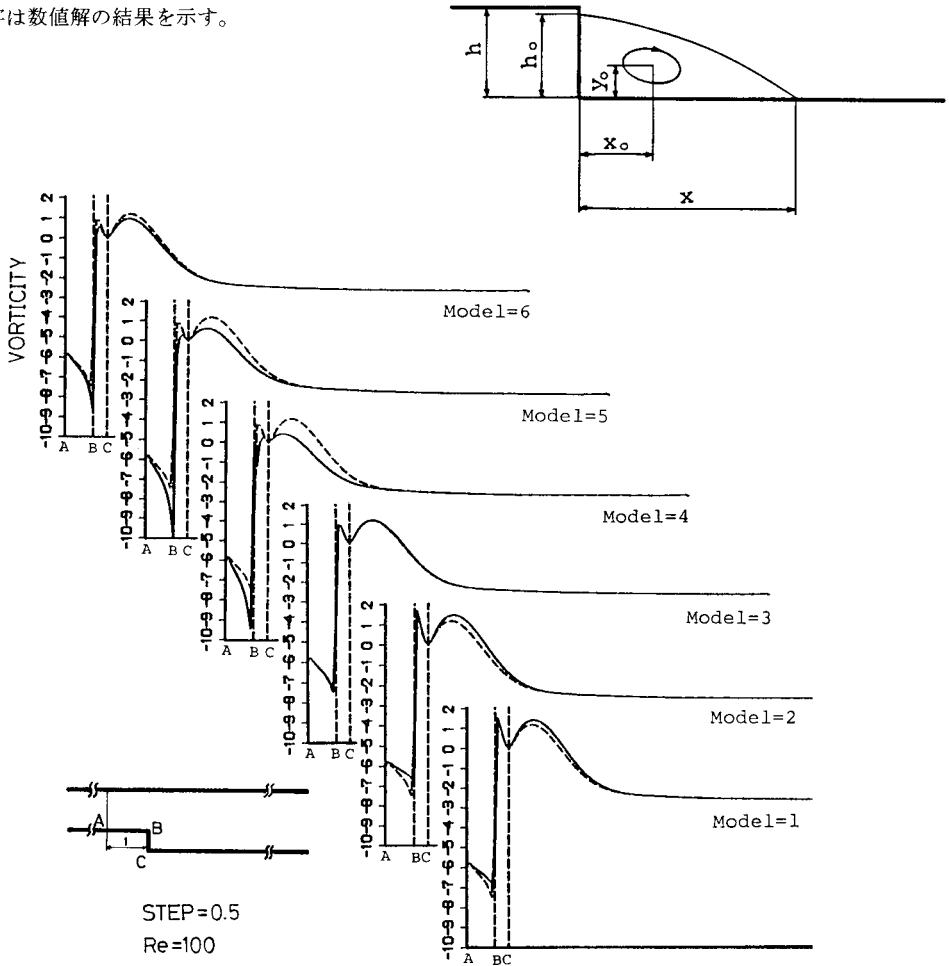


図7 壁での渦度分布 (ステップ側の壁)

-----は Model 0 を示す

ステップにおける流れの剥離は角より下方で起こることが言われている<sup>3),5),7),8),9)</sup>。しかしながら、比較検討の基準とするデータを得るほど多くの研究はない。ただし、Model 4, 5 の剥離点  $h_0/h$  の値は他の研究結果から判断して、明らかに小さすぎることは確である。

渦の中心についても、Model 0, 1, 2, 3 は一致している。また、J. L. Kuny et al.<sup>6)</sup> や中西ら<sup>10)</sup> の実験結果と比較して妥当な値である (表 2 参照)。格子間隔を小さくすると、渦の中心についても、モデル差の影響はなくなる。

図 6 の写真は著者らの可視化実験の一例を示したもので、Model 3 の計算結果と良く一致することを確認した。

### (3) 壁の渦度

壁の摩擦抵抗係数  $C_f$  を

$$C_f = \bar{\tau}_w / \left( \frac{1}{2} \rho U^2 \right) \quad (5)$$

と定義する。ここで、 $\bar{\tau}_w$  は  $\bar{\tau}_w = \mu (\partial \bar{u} / \partial y)_{\text{at wall}}$  で表わされる壁でのせん断応力、 $U$  は流路での平均流速、 $\rho$  および  $\mu$  は流体の密度および粘性係数である。また、記号 $\sim$ は次元を有することを示す。(5)式の右辺を代表速度を  $U$ 、代表寸法を流路幅  $H$  に選んだ無次元表示で表わすと、

$$C_f = -\frac{2}{R_e} (\omega)_{\text{at wall}} \quad (6)$$

ここで  $(\omega)_{\text{at wall}} = (-\partial u / \partial y)_{\text{at wall}}$ 、 $R_e = \mu U H / \rho$  となる。したがって、壁の渦度を調べることは壁に働くせん断応力を調べることと同様の意味をもつ。

図 7 および図 8 は壁の渦度の分布を示したものである。図中の点線は Model 0 の渦度分布を示す。

図から、Model 0 と Model 3 は全く一致する。また、ステップ近傍で、Model 0 に比べて、Model 1, 2 は大きな値をとり、Model 4, 5, 6 は小さな値をとる。

## 5. ま と め

以上の計算結果を次のようにまとめる。

- i) 定性的に流れを調べる範囲では、Model 0, 1, 2, 3 のいずれでもよい。Model 6 を使用する場合は格子間隔に注意を払う必要がある。Model 4, 5 はあまり信頼できる方法でない。
- ii) 実際の流れ場では、解析に用いるようなシャープな角の存在は現実的にまれである。この事を考えると、角を45°の仮想壁とした、Model 3 が最も現実

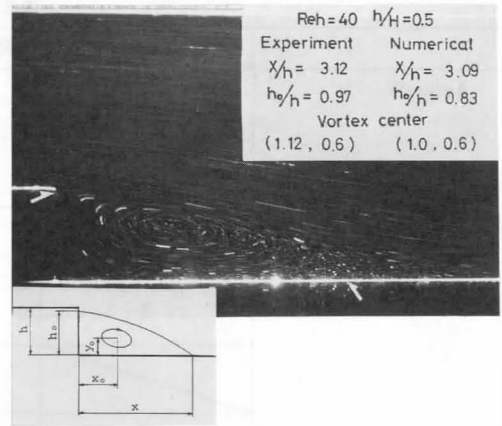


図 6 流跡線 (アルミニウム粉)

△ は再付着点, 剥離点を示す

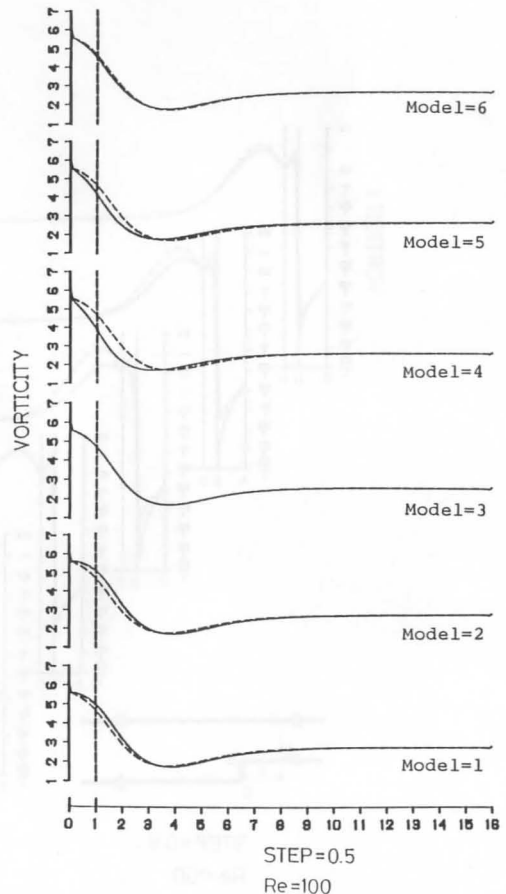


図 8 壁での渦度分布 (上壁)

----- は Model 0 を示す

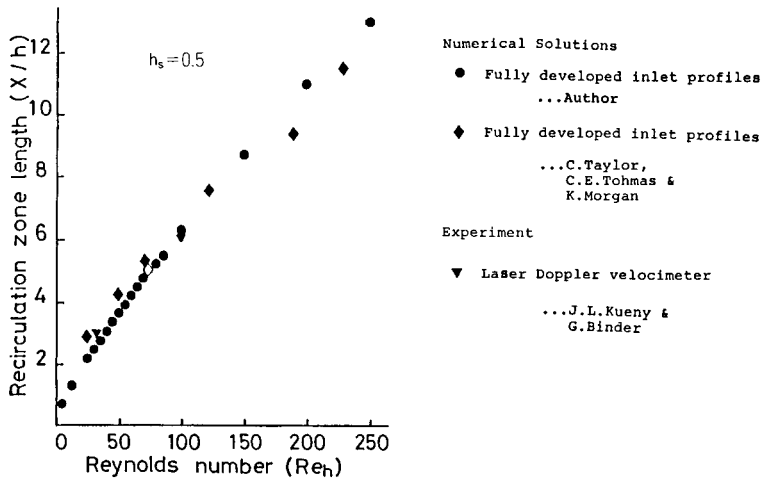


図9 循環渦の長さ  
ステップ比  $h_s=0.5$

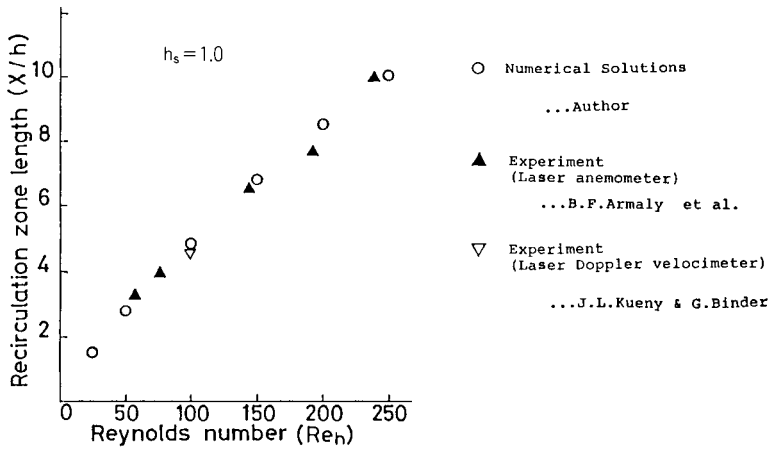


図10 循環渦の長さ  
ステップ比  $h_s=1.0$

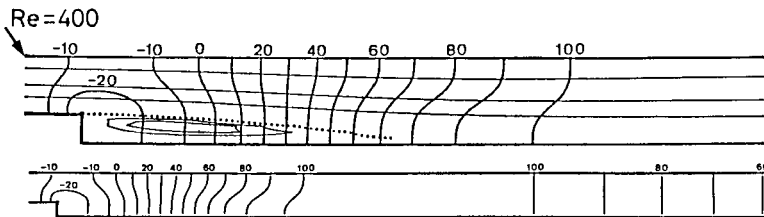


図11 流線および圧力分布 ( $h_s=0.5, Re=400$ )  
→は圧力の基準点を示す  
 $\psi=1.0, 0.9, 0.5, 0.2, 0, -0.01, -0.015$  (.....は  $\psi=0$  を示す)

的な方法である。また、角に働く法線力（例えば圧力）を取扱う場合、評価しやすい利点がある。

iii) Model 0 と Model 3 で計算した ( $\Delta x = \Delta y = 1/20$ ) 渦の長さ  $x/h$  は 1% 以下で一致しており、他の研究者の値とも一致する (図 9, 10 参照) <sup>6), 11), 12)</sup>。

角の渦度の取扱いに関する 7 つの方法の価値の比較は議論の余地があり、いずれにしても、角の渦度を数値的に丸めていることに変わりなく、近似の域を出ない。したがって、目的とする問題にあった角の幾何形状を細かい格子で表現するか、実験的検証に頼らざるを得ない。それらのことを考えたうえ、7 つの方法のどれかを選ぶとすれば、Model 3 を推薦する。

参考のため、Model 3 で計算した圧力分布と他の計算結果<sup>6)</sup>を比較するとかなりの精度で一致する (図 11 は計算結果の一例を流線と等圧力分布図で示したものである)。

## 6. 謝 辞

本計算の遂行に際し、文献の手配や有益なご教示を賜わった、名古屋大学工学部、中村育雄教授に深く感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) A. Thom & C. J. Apelt; *Field Computations in Engineering and Physics*, C. Van Nostrand Company, Ltd. (1961).
- 2) M. Kawaguti; MRC TSR 574, Mathematics Research Center, Madison, Wisconsin (1965).
- 3) P. J. Roache & T. J. Mueller; *AIAA J.*, Vol. 8, No. 3, 530-538, (1970).
- 4) P. J. Roache; *Computational Fluid Dynamics*, Hermore Publishers. (1976).
- 5) C. Shen & J. M. Floryan; *Phys. Fluids*, Vol. 28, No. 11, 3191-3202, (1985).
- 6) K. Morgan et al.; *Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol. 9 Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step*, Friedr. Vieweg & Sohn, (1984).
- 7) M. Takematsu; *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 21, No. 9, 1816-1821, (1966).
- 8) S. Taneda; *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 49, No. 6, 1935-1942, (1979).
- 9) J. Ehlers et al.; *Lecture Notes in Physics Vol. 8*, Springer-Verlag, 356-364, (1970).
- 10) 中西, 大坂; 広島工業大学研究紀要, Vol. 22, No. 26, (1988).
- 11) C. Taylor & K. Morgan; *Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow*, Pineridge Press Ltd. 283-325, (1981).
- 12) B. F. Armaly et al.; *J. Fluid Mech.*, Vol. 127, 473-496, (1983).