

# 表面に周期的に分布する半だ円体状の接触圧力による 半無限弾性体内部の応力解析

(第3報 摩擦力の影響について—数値解析結果)

片 山 剛 之 丞\*

(昭和55年9月30日受理)

## The Analysis of Stress Distribution in a Semi-Infinite Elastic Body by Periodically Spaced Semi-Ellipsoid Contact Pressures

(3rd Report Effect of friction load—Numerical calculation)

Gonojo KATAYAMA\*

(Received Sept. 30, 1980)

It is expected that the effect of friction load is greater than the effect of normal load in the occurrence and propagation mechanism of fatigue cracks of the contact area. In the previous report, the stress distribution by only normally loaded, periodically spaced semi-ellipsoid pressures in a semi-infinite elastic body was calculated.

In this paper is shown the results of calculation of the stress field due to both normal and frictional loading.

It is suggested, from the above numerical calculations, that a much more severe stress state occurs than with only normal loading, and that damage starts from a point much closer to the surface.

### 1. ま え が き

2円筒間の接触問題において、真実接触面に関する研究は古くから数多くなされているが<sup>1)</sup>、これらの大部分は表面の形状因子と真実接触面の大きさとの関係式を確立することに重点が置かれていて、表面の形状因子が物体内部の応力状態に与える影響についての研

究<sup>2)3)</sup>は少ない。

そこで第1<sup>4)</sup>・2報<sup>5)</sup>において、摩擦力が零で垂直方向の荷重のみが働く場合について、GALERKINのベクトル関数を用いて<sup>6)</sup>、半無限体の表面に周期的に分布する半だ円体状の圧力による弾性体内部の応力式を求めた。そしてその理論式をもとに、弾性体内部の応力状態に与える接触面の形状および周期の影響に

\* 機械工学教室

ついて考察した。周期に比較して、浅い深さでは隣りの接触圧力の影響はほとんどなかった。また周期が短かくなってくると、八面体せん断応力  $\sigma_{\theta\theta}$  の最大値が浅くなる傾向にあり、表面での引張応力の値が大きくなる代りに、繰返されるせん断応力の振幅はやや小さくなることわかった。

しかし、一般に接触面の疲れき裂の発生・伝ば機構を究明するにあたっては摩擦力の影響が大きいことが予想される。したがって、すべりをともなう2円筒間のころがり接触によって、弾性体内部が受ける真の応力履歴は、垂直方向の荷重による応力と接線方向の摩擦力による荷重の応力とを重ね合わせることで求むることができる。

また固体の表面は微視的にみれば、アラサがあるので実際には接触面は有限個の突起先端部分でのみ真の接触を起していると考えられる<sup>7)</sup>。したがって摩擦係数の値が接触面全体では低くても、突起先端部分ではその値が非常に高くなること推定される。そして、この局部的に高くなっている部分で損傷が起こると考えられる。

本報告では、まず垂直方向の荷重が零で、接線方向の荷重つまり摩擦力のみが働く場合について、第1報と同様な方法で GALERKIN のベクトル関数を用いて応力式を導いた。そして第1報で導いた応力式に重ね合わせるにより、弾性体内部の応力状態に与える摩擦力の影響つまり摩擦係数の値および接触面の形状・周期の影響について数値計算を行なった結果について報告する。

## 2. 一般式の誘導

接線方向および垂直方向の荷重が働く場合の応力式を求めるためには、これらをそれぞれの荷重が単独に働く場合について求め、それらを重ね合わせるにより求められる。また、第1報において垂直方向の荷重のみが働く場合についてはすでに求めた。故に、ここでは接線方向の荷重が働く場合について求めればよい。

まず、半無限弾性体の座標軸と記号を図1のように決める。

- $2a, 2b$  : だ円体状接触面の長, 短径
- $2l_x, 2l_y$  :  $x, y$  方向の周期
- $u, v, w$  :  $x, y, z$  方向の変位
- $G, \nu$  : 横弾性係数, ポアソン比
- $q_0$  : だ円体状圧力の最大値

次に、変位と応力の一般式を GALERKIN のベクトル  $F_i$  を使って表わすと次のようになる。

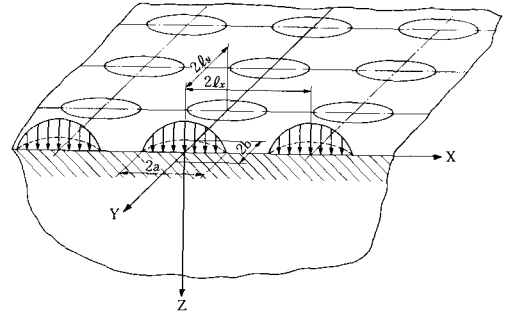


図1 周期的な半だ円体圧力を受ける半無限弾性体

$$\left. \begin{aligned}
 2Gu &= 2(1-\nu) \nabla^2 F_x - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 2Gv &= 2(1-\nu) \nabla^2 F_y - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 2Gw &= 2(1-\nu) \nabla^2 F_z - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 F_x \\
 &\quad + \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 \sigma_y &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 F_y \\
 &\quad + \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 \sigma_z &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_z \\
 &\quad + \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{xy} &= (1-\nu) \left( \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 F_x + \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 F_y \right) \\
 &\quad - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 \tau_{yz} &= (1-\nu) \left( \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_y + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 F_z \right) \\
 &\quad - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 \tau_{zx} &= (1-\nu) \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 F_z + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_x \right) \\
 &\quad - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \right\}$$

また、第1報では垂直方向の荷重が  $z$  方向に作用する場合について考え、条件として

$$\left. \begin{aligned}
 F_x = F_y = 0 \\
 F_z \neq 0
 \end{aligned} \right\} \dots(3)$$

と仮定した。しかし、ここでは接線方向の荷重が  $x$  方

向に作用すると考え、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y = F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

と仮定する。

これより、式(4)を式(1)と(2)に代入すると、変位と応力の一般式は、

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= 2(1-\nu) \nabla^2 F_x - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_x \\ 2Gv &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ 2Gw &= -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F_x}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xT} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 F_x - \frac{\partial^3}{\partial x^3} F_x \\ \sigma_{yT} &= \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \sigma_{zT} &= \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \tau_{xyT} &= (1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 F_x - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \tau_{yzT} &= -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \tau_{zxT} &= (1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_x - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\partial F_x}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

また、GALERKIN のベクトル関数の一般解は、

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\substack{n=0 \\ (n=m=0 \text{は除く})}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_{nm} e^{\omega z} + B_{nm} e^{-\omega z} + C_{nm} \cdot z \cdot e^{\omega z} \\ &\quad + D_{nm} \cdot z \cdot e^{-\omega z}) \cos \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \cos \frac{m\pi y}{l_y} \\ &\quad + (A_{00} + B_{00} \cdot z + C_{00} \cdot z^2 + D_{00} \cdot z^3) \end{aligned} \dots\dots(7)$$

より、式(7)を式(6)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xT} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2(2-\nu) \left( \frac{n\pi}{l_x} \right) \frac{1}{\omega} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{n\pi}{l_x} \right)^3 \frac{1}{\omega^3} (1+\omega z) \right\} \omega^2 \cdot D_{nm} \cdot e^{-\omega z} \\ &\quad \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \cos \frac{m\pi y}{l_y} \\ \sigma_{yT} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2\nu \left( \frac{n\pi}{l_x} \right) \frac{1}{\omega} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{n\pi}{l_x} \right) \left( \frac{m\pi}{l_y} \right) \frac{1}{\omega^3} (1+\omega z) \right\} \omega^2 \cdot D_{nm} \cdot e^{-\omega z} \\ &\quad \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \cos \frac{m\pi y}{l_y} \\ \sigma_{zT} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (2\nu-1) \left( \frac{n\pi}{l_x} \right) \frac{1}{\omega} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{n\pi}{l_x} \right) \frac{1}{\omega} \cdot \omega z \right\} \omega^2 \cdot D_{nm} \cdot e^{-\omega z} \\ &\quad \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \cos \frac{m\pi y}{l_y} \\ \tau_{xyT} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{m\pi}{l_y} \right) \left\{ \frac{1}{\omega} (2(1-\nu)) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{n\pi}{l_x} \right)^2 \left( \frac{1}{\omega^2} + \frac{z}{\omega} \right) \right\} \omega^2 \cdot D_{nm} \cdot e^{-\omega z} \\ &\quad \cdot \cos \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \sin \frac{m\pi y}{l_y} \\ \tau_{yzT} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l_x} \right) \left( \frac{m\pi}{l_y} \right) \frac{1}{\omega^2} \cdot \omega z \cdot \omega^2 \cdot D_{nm} \\ &\quad \cdot e^{-\omega z} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \sin \frac{m\pi y}{l_y} \\ \tau_{zxT} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ 2(1-\nu) - \left( \frac{n\pi}{l_x} \right)^2 \frac{1}{\omega^2} \cdot \omega z \right\} \omega^2 \\ &\quad \cdot D_{nm} \cdot e^{-\omega z} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \cos \frac{m\pi y}{l_y} + 6(1-\nu) \cdot D_{00} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

となる。

以上より、式(8)が接線方向に荷重が作用する場合の

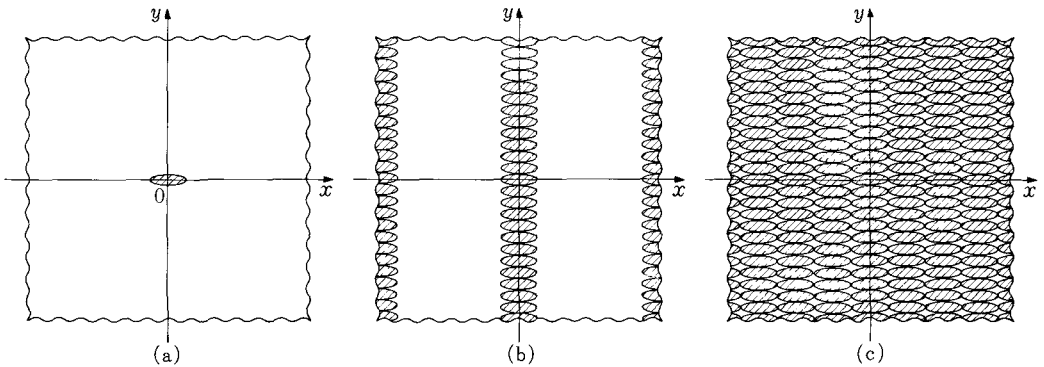


図2 接触面の形状と周期

応力の一般式である。故に垂直方向の荷重と接線方向の荷重が同時に働く場合の応力は、式(8)と第1報の式(9)を重ね合わせるにより求めることができる。

### 3. 数値計算結果と考察

数値計算は接触面の形状はだ円形で、長径/短径 =  $\lambda = a/b = 10$  とし、図2に示したような周期について、その各々に摩擦係数  $\mu$  の値を0.0, 0.3, 0.5, 1.0とする摩擦力を作用させて行った。

図2は、(a)半無限体にだ円体1個の接触圧力が働く場合、(b)周期が  $C_x = l_x/a = 4.0$ ,  $C_y = l_y/b = 1.0$  のだ円体接触圧力が働く場合、(c)周期が  $C_x = 1.0$ ,  $C_y = 1.0$  のだ円体接触圧力が働く場合について示したものである。

図3は図2(a)の場合における  $\sigma_x$  の変化を接触面の表面 ( $x=0.0$ ) で  $x$  方向について示したものである。摩擦係数  $\mu$  が大きくなるにつれて、 $\sigma_x$  の値も  $x$  方向にずれて、 $\mu=0.0$  つまり摩擦力が働かない場合には  $\sigma_x$  の最大値は  $x=0.0$  の点で生じ、その値は  $-1.0 q_0$  であったが、 $\mu=0.3$  と  $0.5$  の場合には  $x=0.4a$  で生じ、その値はそれぞれ  $-1.06 q_0$  と  $-1.12 q_0$  と

なった。また  $\mu=1.0$  の場合には最大値は  $x=0.5a$  の点で生じ、その値は  $-1.34 q_0$  となった。接触端の引張応力について見るとあまり近似度は良くないが、やはり  $\mu$  の値に比例して大きくなり、 $x$  方向にずれている。そして最大の引張応力は  $\mu=1.0$  の場合に生じ、 $x=-1.1a$  の点で  $+0.3 q_0$  となった。

図4は図2(b)の場合について、図3と同様に  $\sigma_x$  の変化を接触面の表面で  $x$  方向について示したものである。傾向としては、図3の場合と同様で、摩擦力が働く  $x$  方向に  $\mu$  に比例してずれているが、とくに  $x=0.7a$  近傍で非常に大きな値となり、 $\mu=0.3$  のとき  $x=0.5a$  の点で  $-1.14 q_0$ ,  $\mu=0.5$  のとき  $x=0.6a$  の点で  $-1.34 q_0$ ,  $\mu=1.0$  のとき  $x=0.7a$  の点で  $-1.87 q_0$  となった。また接触端での引張応力について、 $\mu=0.0$  の場合には  $x=\pm 1.0a$  の点では生じておらず、近似する場合の振幅として  $x=\pm 1.2a$  の点から  $x=\pm 1.4a$  の点でわずかに生じているが、 $\mu=0.3$  の場合には  $x=-1.0a$  の点から生じ、 $\mu=0.5$  と  $\mu=1.0$  の場合にはそれぞれ  $x=-0.8a$  と  $x=-0.6a$  の点から生じた。そして最大の引張応力を生じるのは、 $\mu=1.0$  の場合の  $x=-1.0a$  の点でその値は  $+0.87$

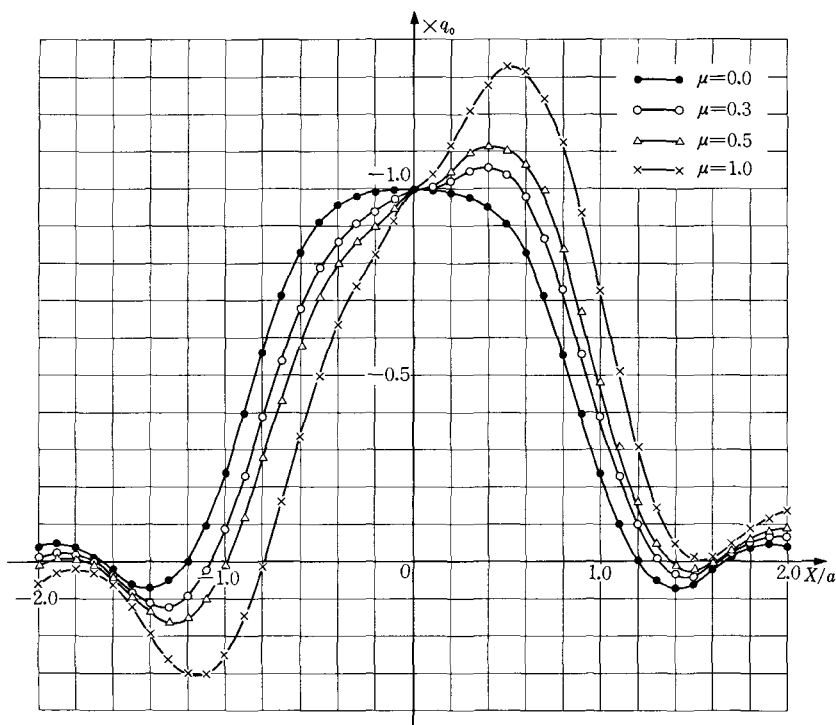


図3 図1(a)の表面における  $x$  方向の  $\sigma_x$  の変化

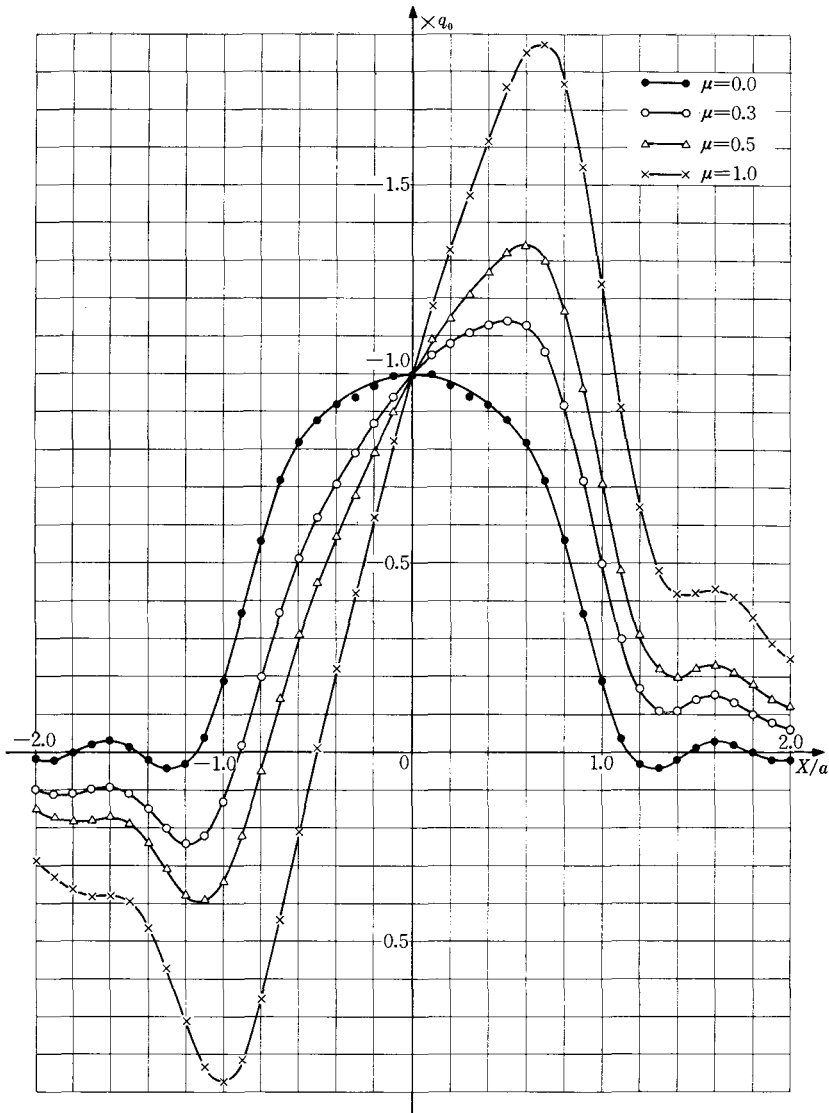


図4 図1(b)の表面における $x$ 方向の $\sigma_x$ の変化

$q_0$ であった。これを摩擦力が働かない場合と比較すると、 $\mu=0.0$ のとき  $x=-1.0a$  で  $-0.19q_0$  よりじつに差引  $1.06q_0$  という大きな引張応力が生じたことになる。

図5は図2(c)の場合について、図3・4と同様に $\sigma_x$ の変化を示したものである。やはり図3・4の場合と同様な傾向を示した。また最大値は $\mu=0.3$ のとき  $x=0.3a$  で  $-1.07q_0$ 、 $\mu=0.5$ のとき  $x=0.4a$  で  $-1.16q_0$ 、 $\mu=1.0$ のとき  $x=0.5a$  で  $-1.43q_0$ となった。そして接触端での応力は、 $x=\pm 1.0a$ では

すべて  $-0.19q_0$ となった。最大の引張応力が生じるのは $\mu=1.0$ のとき  $x=1.1a$  (または  $x=-0.9a$ )の点で  $+0.15q_0$ となった。

次に、図6・7・8は摩擦係数 $\mu$ の変化に対して $\sigma_x$ の変化を示したものであるが、図6は図3において、 $\mu=1.0$ の場合に $\sigma_x$ の値が最大となった点 $x=0.5a$ における変化を示した。同様に、図7・8も図4・5において $\mu=1.0$ の場合における $\sigma_x$ の値が最大となる点 $x=0.5a$ と $x=0.7a$ における変化を示した。いずれも変化は $\mu$ の値に対して直線となり、

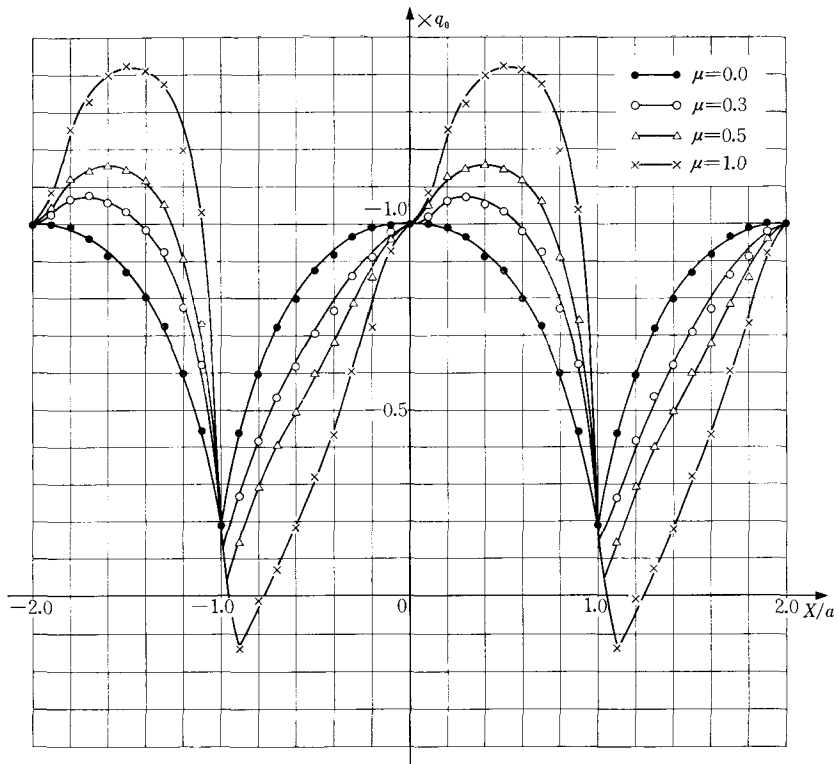


図5 図1(c)の表面における $x$ 方向の $\sigma_x$ の変化

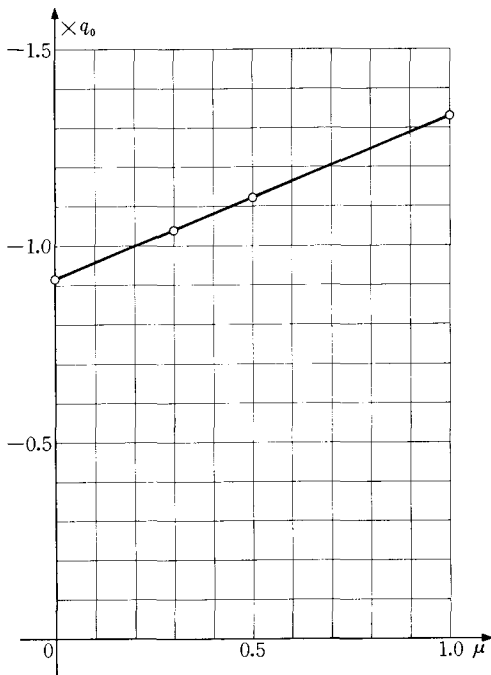


図6  $X=0.5a$ における $\sigma_x$ の変化

図には示さなかったが他の点でも変化はすべて直線となった。

図9・10・11はやはり図3・4・5で $\mu=1.0$ のときに $\sigma_x$ の値が最大となる点で $z$ 方向(深さ方向)の $\sigma_{eq}$ の変化を示したものである。ここで、 $\sigma_{eq}$ は応力状態のきびしさを測る八面体せん断応力である。

図9について、 $\mu=0.0$ の場合に $\sigma_{eq}$ が最大となる深さは $z=0.6a$ でその値は $0.256q_0$ である。 $\mu=0.3$ の場合には最大となる深さは $z=0.5a$ となり、 $\mu=0.0$ と比較して少し浅くなっている。しかし、 $\mu \geq 0.5$ になると最大となる深さは $z=0.0$ つまり表面となった。このことは摩擦力が働かないかあるいは小さい場合には応力のきびしさは内部の方が、また摩擦力が大きい場合には表面の方がきびしくなることから、き裂の発生について注目されるところである。

また、図10・11では $\mu=0.0$ の場合には $z=0.5a$ でそれぞれ $\sigma_{eq}$ の値が最大となり、 $\mu \geq 0.3$ では $\sigma_{eq}$ の値が最大となるのはやはり表面( $z=0.0$ )となった。

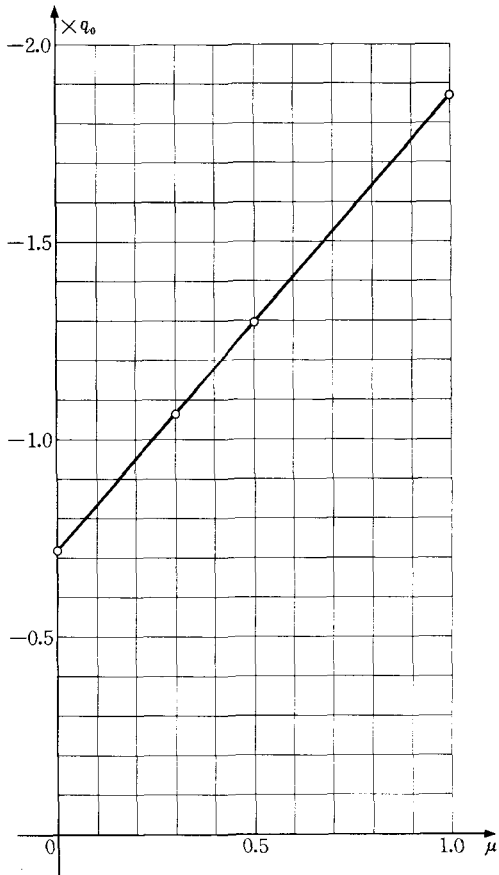


図7  $X=0.7a$ における  $\sigma_x$  の変化

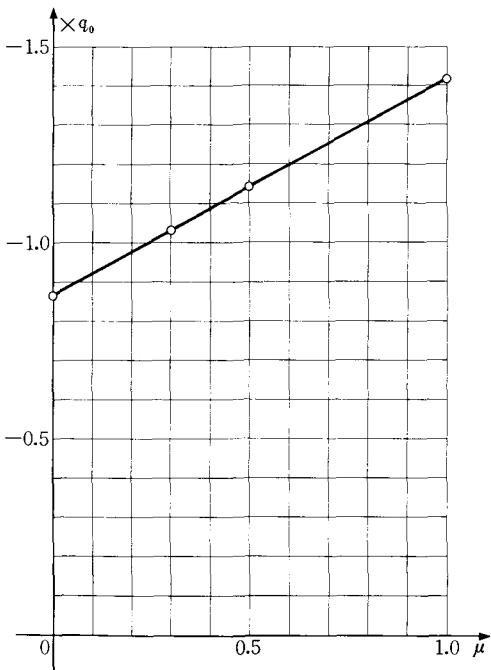


図8  $X=0.5a$ における  $\sigma_x$  の変化

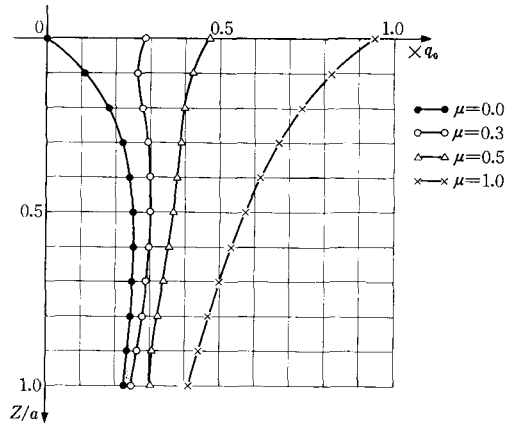


図9  $X=0.5a$ における  $\sigma_{eq}$  の深さ方向の応力変化

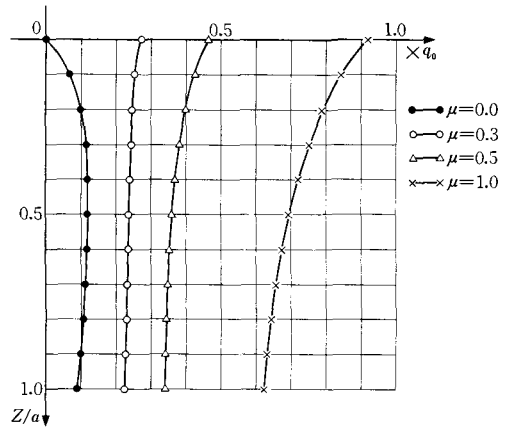


図10  $X=0.7a$ における  $\sigma_{eq}$  の深さ方向における応力変化

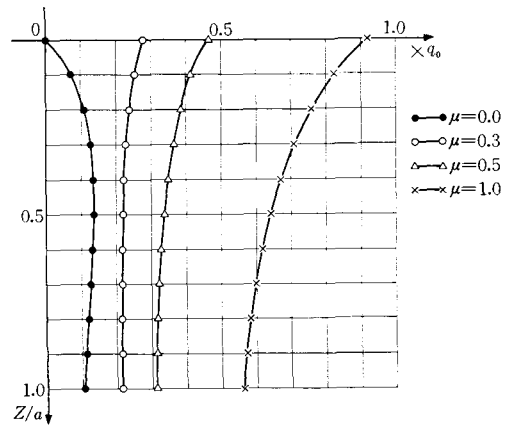


図11  $X=0.5a$ における  $\sigma_{eq}$  の深さ方向の応力変化

#### 4. 結 言

接触面の形状がだ円体と考えて、垂直荷重と摩擦力が同時に働いた場合の弾性体内部の応力状態について解析を行った。八面体せん断応力  $\sigma_{eq}$  について、摩擦力が働かない場合には、その値が最大となるのは弾性体内部であったが、摩擦力が働くとその位置ははだいに浅くなり、 $\mu \geq 0.5$  ではすべて表面で最大となった。

また実際の接触面では、垂直荷重と摩擦力が同時ではなくそして周期も違って作用していると考えられるので、これらを考慮した解析について、今後さらに研究を進めて行きたい。

最後に、研究を進めるにあたり有益なるご指導を賜わった本学工学部山下尚義助教授に心より謝意を表します。また計算に際して多大の便宜を計っていただいた本学電子計算機室の室員の方々に深く感謝いたします。

#### 5. 参 考 文 献

- 1) P. R. Nayak: Trans. ASME, Vol. 94, Ser. E (1972), 456.
- 2) P. K. Gupta & J. A. Walwit: Trans. ASME, Vol. 96, Ser. F (1974), 250.
- 3) 山下, 片山: 潤滑, Vol. 21, No. 10 (1976), 676.
- 4) 山下, 片山: 広島工大研究紀要, Vol. 10, No. 14 (1976), 167.
- 5) 片山, 山下: 広島工大研究紀要, Vol. 10, No. 14 (1976), 173.
- 6) Y. C. ファン (大橋ら訳): 固体の力学/理論, 培風館 (1970), 192.
- 7) J. Halling: Introduction to Tribology, WYKHAM PUBLICATIONS (LONDON) LTD (1976), 43.