広島工業大学紀要教育編
第 14 巻（2015）23-28
論　　　　　文

GPA の適正な有効数字

尾崎　徹*・井上　光**

（平成26年10月29日受付）

Significant Figures Proper for Grade Point Average (*GPA*)

Tōru OZAKI and Hikaru INOUE

（Received Oct. 29, 2014）

Abstract

Grade Point Average (*GPA*) is a numerical value evaluating a student's quality of performance and therefore has the significant figures. In order to obtain the significant figures proper for *GPA*, we modeled a report card which included sixty-eight total subjects graded respectively with five integral Grade Points (*GP*), 0, 1, 2, 3, 4. The Semester *GPA*, the Cumulative *GPA* and their uncertainties were calculated by applying a statistical theory of experimental data processing. We obtained the values of the Semester *GPA* and the Cumulative *GPA* which had at most three significant figures between 0.00 and 4.00. This is supported by the obtained values of the uncertainties and consistent with the significant figures of *GPA* graded in many universities at home and abroad. We should evaluate the student's performance on the basis of his/her *GPA* with the proper significant figures.

Key Words: Grade Point Average (*GPA*), Semester *GPA*, Cumulative *GPA*, significant figure, standard deviation, uncertainty

1．はじめに

大学は学生の成績を厳格に評価することが求められている[1]。そのための評価方法として，米国で一般的に実施されている Grade Point Average（*GPA*）制度を採用するように奨められている[2]。その結果，*GPA* 制度は平成 23 年度までに国内の大学の 61％に相当する 453 大学で採用されるまでになった。*GPA* は受講科目の平均的な評価を表す数値である。本学では，平成 18 年度から *GPA* 制度を開始しており，*GPA* を学生の学修指導のみならず，奨学金や授業料免除，大学院進学や就職の推薦の基準として使っている[3]。これに対して，*GPA* の値を学修指導だけに使い，奨学金や授業料免除の基準に使わないことを明示している大学もある[4]。このような *GPA* の活用範囲の違いは，*GPA* の確からしさに対する認識の違いによると考えられる。その確からしさを表す指標が有効数字である。今や *GPA* は学生の人生を左右する重要な数値であり，その有効数字を確認したうえで活用する必要がある。

私たち物理学の教員は物理学実験に力を入れている[5, 6]。学生に，理工学の方法と考え方を身につけて信頼される技術者になるためのスタートラインに立ってもらうためである。そのために，「測定値には必ずランダムな誤差が含まれており有効数字がある。」と口を酸っぱくして言っている。同じように, *GPA* は成績を評価する平均値であり，限られた桁数の有効数字を持つ。そのことを教職員と学生が認識して *GPA* を活用することは，本学のような理工系の大学において重要である。学生に，「あなたの *GPA* に有効数字がありますね。それと同じように，あなたが実験をして得た測定値には有効数字があります。有効数字は測定者が責任を持って公表する値です。」と説得力のある指導をしたい。本論文では，成績のモデルを作り，それに実験データ処理法を適用して *GPA* とその不確かさを計算する

* 広島工業大学工学部電子情報工学科(物理担当グループ)
** 元広島工業大学教授(物理担当グループ)

ことにより，GPA に適正な有効数字とその桁数を得る。それをもとにして，GPA を有効数字の範囲内で活用することが GPA 制度の目的にかなうことを述べる。

２．*GPA* とその活用範囲

2.1　*GP*，*GPS* と *GPA*

日本の大多数の大学で採用されている評点と標語（Grade）の関係を使って GPA を具体的に説明する。成績を評価する数値を Grade Point と呼んで GP と略すことにする。表１のように，GP は評点と標語に対応した成績を表す数値であり，一般的に評点の高い方から順に４，３，２，１，０の整数値である[7, 8]。標語は大学によって変わるが，GP は変わらない。本学や大阪大学などでは，GP を 4.0, 3.0, 2.0，1.0，０の２桁の数値で表している[3，4]。これは，評点をもとにして標語を慎重につけていることをアピールしていると解釈される。しかし，実際には４，３，２，１，０の整数値を使っているので，表１のように整数値の GP を公表すべきである。米国では，標語をさらに細かく分けて GP と GPA をともに 4.00 と 0.00 の間の３桁で表している大学が多い[2]。

表１． 評点，標語と *GP*.*

評点	標語	*GP*	判定
90 － 100	@	4	合格
80 － 89	A	3	
70 － 79	B	2	
60 － 69	C	1	
0 － 59	D	0	不合格

* 標語は本学のものを示した.

受講した科目を自然数 i で区別して，その単位（credit）を c_i で表そう。c_i の値は，例えば，演習などは１，講義は２，実験は２または３であり，卒業研究は５である。科目数が n のとき，GPAは科目 i ごとの単位 c_i を重みにした受講科目の GP_i の平均値として，次式で表されている[2，3，4，7，8]。

$$GPA = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i GP_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} = \frac{GPS}{C} \tag{1}$$

分母の $\sum_{i=1}^{n} c_i = C$ は受講届をした科目の単位の合計である。本学では，学期の途中で放棄した科目の単位も含むが[3]，含まない大学もある。分子の $\sum_{i=1}^{n} c_i GP_i = GPS$ は，受講届をした科目 i ごとの単位 c_i と GP_i の積 c_iGP_i の和である。それをここでは Grade Point Sum と呼んで GPS と略すことにしよう[9]。GPA には，学期ごとに受講した GP_i の平均値を表す当該期 GPA（Semester GPA）や入学時から当該学期末まで通算した GP_i の平均値を表す通算 GPA（Cumulative GPA）がある。

2.2　*GPA* の桁数と活用範囲

GPA の桁数とその活用範囲は大学によって異なる。まず，式（1）で表される GPA の数値の桁数を紹介する。米国の大学を含めてほとんどの大学では小数第３位以下を切り捨て，小数第２位までの３桁にして $0.00 \leqq GPA \leqq 4.00$ の範囲で表している[2，4，7，8]。これに対して，本学では小数第５位を四捨五入し，小数第４位までの５桁にして $0.0000 \leqq GPA \leqq 4.0000$ の範囲で表している[3]。

GPA はおもに学生の学修指導に使われているが，活用範囲は異なる。例えば，大阪大学では，教員が学修指導をするときに活用し，また学生が履修計画を作成するときに活用させている[4]。しかし，GPA は成績書に記載せず，奨学金受給候補者や留学候補者の選考にも使わない。筑波大学でも，GPA を教員の学修指導に利用して，学生に自律的に活用させている[7]。ここでは GPA を成績書に記載して，進級や大学院受験の条件，学外の奨学金の選考，就職の推薦などに利用している可能性がある。岡山大学では，学生が GPA をもとにして受講届をする科目数を自主規制するように促している[8]。本学では[3]，当該期 GPA はおもに学生の短期的な学修指導に使い，通算 GPA は奨学金受給候補者や大学院推薦入試志願者の選別，就職の推薦などに使っている。さらに，５桁の通算 GPA を成績証明書に記載している。同じ学修指導でも本家の米国の方がきめ細かくしかも厳しい[2]。例えば，$GPA < 2.00$ が続くと退学が勧告され，通算 $GPA \geqq 2.00$ でなければ卒業することができない。

GPA の桁数によって活用範囲が決まっているはずであるが，日米のどの大学も GPA の桁数を定めた根拠を明らかにしていない。次節では，GPA に適正な桁数の有効数字があることを示す。

３．*GPA* の有効数字

GPA の適正な有効数字について具体例で考えたい。そのために比較的順調に単位を取得して４年間で卒業した学生を念頭において成績表のモデルを作成した。その当該期と通算期の科目数 n，単位数 C と GPS および結果の GPA を表２に示す。

物理学実験では測定値一般について有効数字の扱い方と統計的な考え方を教えている。そこには GPA の場合と共通のルールや考え方があるので，これらをもとにしながら話をすすめたい。引用の便宜のため，関連する事項を本学の物理学実験の教科書[10]から抜粋して付録にまとめてい

表２． 成績表のモデルを作成して計算した当該期 *GPA* と通算 *GPA*.*

学年	学期	当該期						通算					
		科目数 n	単位数 C	*GPS*	*GPA*	標準偏差	不確かさ	科目数 n	単位数 C	*GPS*	*GPA*	標準偏差	不確かさ
1	前	16	25	82	3.28	0.68	0.17	16	25	82	3.28	0.68	0.17
	後	13	21	59	2.81	1.21	0.34	29	46	141	3.07	0.96	0.18
2	前	14	27	68	2.52	0.94	0.25	43	73	209	2.86	0.97	0.15
	後	8	17	42	2.47	1.07	0.38	51	90	251	2.79	0.99	0.14
3	前	9	18	61	3.39	0.88	0.29	60	108	312	2.89	0.99	0.13
	後	6	13	39	3.00	0.89	0.37	66	121	351	2.90	0.98	0.12
4	前	1	2	8	4	–	–	67	123	359	2.92	0.98	0.12
	後	1	5	15	3	–	–	68	128	374	2.92	0.97	0.12

＊４年後期末までの受講科目数：１単位科目 15，２単位科目 48，３単位科目４，５単位科目１.

る。

3.1　*GPS* の有効数字と *GPA* の有効数字

教科書[10]では，データ処理法の章を「１.有効数字とその表記法」，「２.有効数字を考慮する計算」の節から始めている。そこでは測定値の表記法と計算法を，例を使って説明した上で，その後の計算で学生が有効数字の判断で迷うことが少ないように，４つの「ルール」にまとめてある。個々のルールについては付録を参照されたい。以下では，表示桁数の選択についてのルール２～ルール４が必要である。なお，これらのルールは測定値どうしの計算に適用されるものである。測定値と定数の積また商の計算では，結果の有効数字の桁数は測定値の桁数と同じである。さらに，*GP* に適用する場合はルール中の言葉「測定値」を単に「変数」（または「標本値」）に置き直して考えればよい。

ルールにしたがって成績モデルの *GPA* を計算しよう。式（1）で変数として有効数字を考える必要のある量は整数の評価値 *GP*（変数値０，１，２，３，４のどれか）と *GPS* および小数点以下に値を持つ *GPA* である。単位 c_i とその合計 C は整数の定数であり，有効数字の桁数の判断には関係しない。まず，ルール２により整数値 *GPS* ではすべての桁が有効数字になる。つぎに，*GPA*=*GPS*/*C* の有効数字の桁数はルール３により単純には *GPS* の有効数字の桁数と一致する。これ以降は，ルール４による見直しが必要になる。

まず，当該期 *GPA* を考える。３年後期まで当該期間の *GPS* は２桁であり，ルール３によれば，当該期 *GPA* は小数第１位までの２桁の数値である。しかし，表２にみられるように，単位数 C は 13 ～ 27 と 20 前後の数であるので，値が隣り合う２つの *GPS* から２桁の *GPA* を出すと，四捨五入されて同じ値になる場合が頻出する。たとえば，*GPS* が 59（表値）でも 58 でも *GPA* は 2.8 になる。*GPS* のすべての有効数字を区別して *GPA* に移すためにはルール４により少数第２位までの３桁を使う方がよい。４年前期と４年後期のように受講科目が１科目だけの場合は *GPA*=*GP* であり，例外的な扱いになる。

つぎに，通算 *GPA* を考える。１年前期では，この値は当該期 *GPA* と同じである。１年後期以降では *GPS* は３桁であり，したがって通算 *GPA* も小数第２位までの３桁の数値になる。表値にみられるように，通算の意味が増してくる２年次以降ではルール４による見直しは不要であり，ルール３による判断までで十分である。

どの大学も *GPA* の桁数の根拠をとくに説明していないが，上のルール２～ルール４が暗黙裡に認められていると思われる。本学で物理学実験を受講した学生は自分の *GPA* の有効数字を上のルールをもとに考えることができる。

3.2　*GPA* の統計的ゆらぎ

GPA の有効数字を統計論の立場で調べたい。そのために，*GP* の集まりについて，標準偏差と平均値の不確かさの２つの統計量を試算する。具体例として，表２の４年後期末の通算 *GPA* の場合を取り上げる。この場合の *GPA*=2.92 のもとになっている *GP*=（０，１，２，３，４）に対する科目数と単位数の度数分布を図１に示す。受講科目には２単位科目（モデルでは全 68 科目中 48 科目）が多い上に１単位科目と３単位以上の科目が打消し合うので，単位数は科目数の約２倍になっている。成績評価の *GP* と物理的な測定値は無論同列におくべきではないが，統計と確率の点で数学的には同じ式が使える。以下，付録の式と考え方を引用しながら話をすすめる。

まず，標準偏差を付録の式（A2）で計算する。各教員が与える *GP* の独立性の立場から，ここでは科目数の分布を使うべきである。式（A2）で，$\bar{X}$=2.92 とすれば，標準偏差は s=0.97 となる。この値は，図１に示すように，*GP* の分布の広がり方の目安である。成績ムラの大きさとみるのが妥当である。

つぎに，平均値の不確かさを付録の式（A3）で計算する。上の標準偏差 0.97 を全科目数の平方根 $\sqrt{68}$ で割ると 0.12

を得る。さらに，式（A4）により平均値 $\bar{X}$=2.92 の前後に 0.12 の幅をもつ区間 2.80 ～ 3.04 を考える。これ以降は確率的な話に移る。

仮に，図１の分布が付録の式（A5）のガウス分布に従っているならば，平均値つまり *GPA* は 68％の確率で上の区間内にあるといえる。物理学実験ではガウス分布を母集団分布とする仮定が一般的に認められ，結果もこのように確率つきで解釈されている。しかしながら，今のところ図１の分布が従う母集団分布は不明であり，相当する確率の算出は不可能である。分布を仮定するためには多数の実例を分析する必要がある。ただ，統計論の極限則である中心極限定理によれば，平均値そのものはガウス分布に近い分布に従うので，確率は 68％と大差はないと思われる。一般に，未定・不明の部分を含みながら結論をだす必要のある場合はこのような確率的な表現以上のことはできない。

表２や図１はモデルの１例にすぎないが，上に得た不確かさ 0.12 は「通算 *GPA* の有効数字は不確かさと同じ小数点以下２桁までとれば十分である」ことを示している。これは前節のルールで決めた結果と同じである。*GP* は教員各位がよく考えて決めているとしても，それを集めた学生個人の *GPA* にはこの程度の「統計的なゆらぎともいえる不確かさ」が付随している。式（A3）によれば，この不確かさは標準偏差に比例し，科目数の平方根に反比例している。科目数が少ないと不確かさはこれよりも大きくなる。実際に上の方法で表２のモデルについて３年後期までの当該期 *GPA* の不確かさを試算したところ，結果は 0.17 ～ 0.38 の間に散らばった。

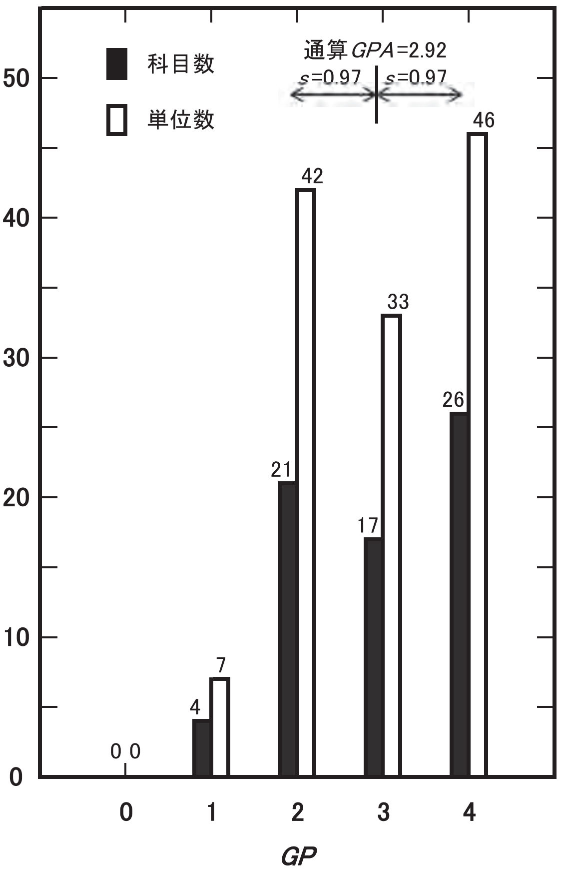

図１　成績表のモデルにおいて４年後期末まで通算した科目数と単位数を出現度数として表した *GP* の分布．

物理学実験では実測データのとりまとめ方を通して，有効数字の扱いに加えて，平均値や平均誤差などの統計量の確率的な見方を教えている。丁寧にガイダンスをすれば，学生は自分の *GPA* について，上のような試算とその結果の考え方を会得するであろう。

４．まとめ

多くの大学で採用されている *GPA* 制度の概要を紹介し，問題点を指摘した。とくに，*GPA* の桁数に明確な根拠を与えるために，全科目数 68，全単位数 128 の成績モデルを作って *GPS* と *GPA* を計算し，さらに *GP* の標準偏差および *GPA* の不確かさを試算した。このために物理学実験で教えている有効数字の扱い方および統計的な考え方を適用した。成績モデルは１例にすぎないが，実際に得られた値をもとにして，桁数に関しては次のように結論される。

(1)　１年後期以降の通算 *GPA* は３桁の有効数字を持つ。これが適正であることは通算 *GPS* の有効数字が３桁であることから直接に結論されるが，４年後期の通算 *GPA* に見られた 0.12 程度の不確かさからも支持される。

(2)　３年後期までの当該期 *GPA* も３桁の有効数字を持つ。ただし，もとになる当該期 *GPS* の有効数字は２桁であり，*GPA* の小数点以下２桁目の数字は *GPA=GPS/C* の計算に伴う精度の劣化を防ぐ役をしているに過ぎない。また，モデルに見られた不確かさ 0.17 ～ 0.38 は当該期 *GPA* の有効数字が３桁または２桁であることを示している。どちらにするかは *GPA* をどう使うかにもよる。これ以上は複数のモデルによる検討が望まれる。

桁数の検討にあたって，統計的な意味での *GPA* の不確かさの程度も分かってきた。もともとは確率的な表現方法からくるものである。*GPA* の値だけによる断定的な判断を避ける方がよい。将来の可能性を育てる教育の場で，これは大切な視点である。

最後に，*GPA* の有効数字は高々３桁であり，それより桁数の多い値を使って成績を評価しても，厳格でないのみならず，適正に評価したことにはならない。特に，*GPA* の有効数字の桁数を越えて順位をつけてはならない。学修指導では，当該期 *GPA* と通算 *GPA* をそれぞれの有効数字の範囲内で活用することが大切である。それが *GPA* 制度の目的にかなっている。

文　献

［1］文部科学省，大学における教育内容等の改革状況等について（平成 23 年度).
http://www.mext.go.jp/a_menu/koutou/daigaku/04052801/1341433.htm
調査結果（１～４)，*GPA* 制度の活用.
http://www.mext.go.jp/a_menu/koutou/daigaku/04052801/__icsFiles/afieldfile/2014/03/10/1341433_03.pdf

［2］The Pennsylvania State University，Grades and Grade-Point Average.
http://handbook.psu.edu/content/grades-and-grade-point-average

［3］広島工業大学，*GPA* に関する取扱規則，CAMPUS GUIDE 2016，p.232.

［4］大阪大学，グレード・ポイント・アベレージ（*GPA*）制度.
http://www.osaka-u.ac.jp/ja/education/gpa

［5］広島工業大学物理グループホームページ，教育活動，１授業，1-1 学部，［13]物理学実験シラバス.
http://www.physics.cc.it-hiroshima.ac.jp/

［6］尾崎　徹，鈴木　貴，大政義典，北野保行，細川伸也，“接続型教育を目指して　第４報　基礎物理科目から専門科目への接続の調査と改善”
広島工業大学紀要　教育編，第９巻，pp.27-36，2010.
http://harp.lib.hiroshima-u.ac.jp/it-hiroshima/metadata/8099

［7］筑波大学，*GPA* 制度の導入について.
https://www.tsukuba.ac.jp/education/gpa.html

［8］岡山大学，*GPA* 制度について.
http://www.okayama-u.ac.jp/tp/life/gpa_h20.html

［9］本論文の Grade Point（*GP*）と Grade Point Sum（*GPS*）は，それぞれ，米国の Grade Point Equivalent と Grade Points に対応している．文献[2]を参照されたい.

［10］中西助次，井上　光，尾崎　徹，細川伸也，大政義典，小島健一，工科系のための物理学実験＜第３版＞，第２章，2014，東京教学社．ISBN978- 4-8082-2061- 7
http://www.physics.cc.it-hiroshima.ac.jp/education2.html

付録　物理学実験のデータ処理

物理学実験では始めの数コマを使ってデータ処理法の授業を行っている[5]。その内容である「有効数字の適正な扱い方」と「ランダムな測定値に伴う誤差の評価法」を本文中で引用したい。以下にその要点を教科書[10]から抜粋する。

有効数字の適正な扱い方

まず具体例を示した上で，表記法と計算法を次の４つのルールにまとめている。

ルール１：物理量の値は〔有効数字〕× 10^n に単位名を添えた形で表す。

ルール２：測定値どうしの和または差の計算では，両測定値の下位桁に有効数字がある範囲で計算する。必要に応じて四捨五入を行う。

ルール３：測定値どうしの積または商の計算では，結果の桁数は有効数字が少ない方の測定値の桁数と同じとする。必要に応じて四捨五入を行う。

ルール４：測定値どうしの積または商の計算では，もとの測定値の四捨五入の影響を受ける桁までを結果の有効数字とする。

測定値の精度が計算途上で失われるのを防ぐためにルール４が必要である。ルール３はルール４に含まれる。大抵の場合，ルール３までですむ。

ランダムな測定値に伴う誤差の評価法

測定値は真の値の付近で偶発的にある値に決まるように見える。ひとつの測定値だけでは真値の見当はつくが，誤差は分からない。測定を繰り返して，誤差の大きさを推定する。ここで，測定値の集まりの平均値，標準偏差，平均誤差の３つの統計量を扱う。ある測定を n 回繰り返して得た一連の測定値を X_1，X_2，$\cdots X_n$ で表すと，これらの統計量は次式で計算される。

平均値 $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad \text{(A1)，[(2)，(7)]}$$

標準偏差 $$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad \text{(A2)，[(3)，(26)，(31)]}$$

平均誤差 $$\sigma_X = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \text{(A3)，[(6)，(17)，(25)，(32)]}$$

［　］内の番号は教科書[10]の式につけられた式番号である。

測定の回数 n を増すにつれて，これらの各量はそれぞれ特徴的な振る舞いをする。平均値 $\bar{X}$ は，始めは大きく変動するが，そのゆらぎ方はだんだん小さくなり一定の値 X_0 に近づく。この X_0 は真値とみなされる。同様に，標準偏差 s も似たパターンの揺らぎを示しながら一定の値 σ に近づく。この σ は測定の操作（測定装置または器具など）に固有の量で，測定値 X_i の変動範囲の目安とみなされる。平均誤差 σ_X はゼロに近づく。そのゆらぎ方がだんだん小さくなるようすが平均値 $\bar{X}$ のゆらぎ方と似ている。この σ_X が平均値 $\bar{X}$ の誤差とみなされる。真値 X_0 との関係は次の式で表される。

真値 X_0 の推定値 $X_0 = \bar{X} \pm \sigma_X$　　（A4），［(6)，(18)］

この式は真値 X_0 が $\bar{X} - \sigma_X$ と $\bar{X} + \sigma_X$ 間にあることを意味している。ただし，100%の確かさで言うのではない。確かさは確率 p で表される。

測定値 X_1，X_2，…X_n がしたがう分布（これらの度数分布を表せる関数）を仮定すれば，この確率が計算できる。物理的なデータ処理では，ガウス分布（正規分布）を仮定している。

ガウス分布 $f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-X_0)^2}{2\sigma^2}}$　（A5)，［(4)，(5)，(30)］

この場合，確率 p は68%となる。確率の値は式（A4）で表す値の信頼度といえる。おおまかに言えば，３回に２回の割合で「当り」を得るような事柄の表現法である。

誤差の伝播則などの物理的なデータ処理公式の多くはガウス分布をもとにして導きだされる。学生にとって導出や証明が難しい場合は，数値例を使って納得してもらう。