

小さな Reynolds 数における平行平板間の 助走区間流れについての数値解**

(熱を伴う場合—I)

中 西 助 次*

(昭和53年10月6日受理)

Numerical Solution for Laminar-Flow in the Inlet Section of Parallel-Plates at Small Reynolds Number

(In the case of heated flow-I)

By Suketsugu NAKANISHI

(Received Oct. 6, 1978)

Momentum and energy equations were solved by using the finite difference method under the assumption that the two equations are independent, with regard to the velocity and temperature distributions of flow in the inlet section between parallel-heated plates.

Dependencies of the development pattern of velocity and of the temperature distributions are shown to be on the Peclet number.

1. ま え が き

数値解法は電子計算機の発達にしたがって急速に進歩して来ており、流体力学あるいは熱工学に関しても、数学的解析手法では困難とされる非線形項の取扱、流れが時間的に変動する非定常流れ（現在の所、乱流問題を取扱うまでには至らず脈動流の段階である）の場合などについてかなりの威力を発揮している。また、実験的・測定データを得ることの困難な領域の問題にも有益な方法であろう。

ここで、円管および平行平板流路などの助走区間流れに関する研究を取り上げてみると次のような報告が数値解法を用いてなされている。たとえば、W. H. Kays は H. L. Langhaar の円管内流れについての流

速分布の解析解¹⁾を用いて、エネルギー方程式を線形化し、温度分布および熱伝達に関する数値解を²⁾、D. H. Ulrichson らは半径方向の対流項を考慮して W. H. Kays の結果（半径方向対流項を無視したもの）を改良した数値解を³⁾、また、R. Manohar は差分法を用いて流速分布、温度分布および熱伝達に関する数値解を⁴⁾、そして黒崎はふく射と対流の共存する流れについて J. R. Bodoia が円管助走区間流れに用いたと同じ差分法を用いて数値解⁵⁾を報告している。

ただし、これらの報告はすべて境界層理論の成立つ大きな Reynolds 数の流れに関したものであり、特に熱伝達を問題にしている。このことは解析に際して、境界層内を問題にすればよく、特に熱伝達に関する限り、壁面のごく近傍の流れさえわかればよい。したが

* 物理学教室

** 昭和53年9月16日広島工業大学研究発表会にて発表

って、解析に用いる基礎方程式は壁面に垂直方向の粘性力および壁面平行方向の熱伝導項をそれぞれ消去した型の境界層に関する方程式を基礎にしたものである。また、流体の物理的性質は温度に依存しないとして、運動方程式とエネルギー方程式を独立に解を求めている。この仮定は加熱壁面—流体間の温度差の小さな場合は全く満足するものであるが、彼れらの報告で取扱っているような大きな温度差の場合は若干の問題を生じる。しかし、前にも述べたように、彼れらは特に熱伝達を問題にしており、一般にそのような場合にこれらの厳密な解析は実際的でなく、補正係数を乗ずる事によって補えばよいとされているからであろう。

このような大きな Reynolds 数範囲での熱伝達を問題にした報告に比べて、Reynolds 数が小さな、特に慣性項と粘性項が同程度に影響するような流れに関する報告はあまり多くない。この理由として考えられることは実際の工業上の問題として大きな流量および大きな熱交換の要求から来たものであろう。

ところが一方、小さな Reynolds 数の流れは呼吸器、泌尿器および血液循環系などの生理流体力学、人工肺などの人工生体装置および生物工学、また省エネルギー技術問題の一つである空気調和に関する冷暖房熱交換機や空気調和用ダクト内流れ、などに関連した興味ある問題と考える。

このような小さな Reynolds 数流れ場での対流熱問題を扱う場合に、大きな Reynolds 数流れではそれほど厳密には必要としなかった流速分布および温度分布がどのように発達してゆくか、また温度変化に伴う流体物性値の変化が流速分布および温度分布にどのように影響をおよぼすかがむしろ興味ある問題となるであろう。

そこで、加熱壁面—流体間の温度差の小さな、加熱平行平板流路（壁面温度一定）の助走区間流れに関して、Reynolds 数が1から20、また Prandolt 数が0.02から4についての流速分布および温度分布の数値解を得たので若干の考察を加えて報告する。

2. 計算モデル、基礎方程式 および境界条件

2.1 計算モデル

数値解析は前報⁶⁾で行なったと同様の平行平板流路モデルにおける助走区間流についてである。図1に示すように、間隔 h で置かれた平行平板流路の流路入口を原点に、流れ方向の平板壁に沿って x 、それに垂直に y 軸を選ぶ。この流路を流体が流れており、 $x \geq$

0 の領域で平板壁温が T_w にステップ状に加熱され、流路壁と流体間で熱伝達が行なわれる場合である。流れは非圧縮性流体で定常な2次元層流であり、流路入口 ($x=0$) では圧力 P_0 、平板に平行な流速 u_0 および流体温度 T_0 の一様な速度および温度分布で流入する。平板壁温 T_w は一定でかつ平板壁—流体間の温度差は小さい。したがって、流体の物性値は温度に依存せず一定で、しかも温度場に関係した外力(浮力)は働かない。また、小さな Reynolds 数流れを考えているので、流体の摩擦による発熱はないと仮定する。

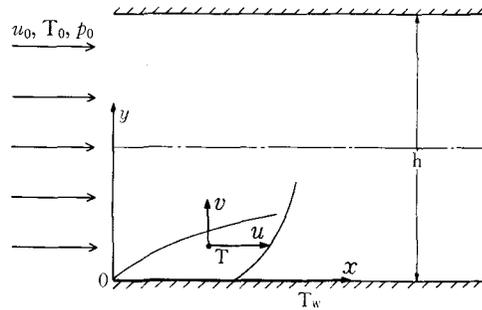


図1

2.2 基礎方程式

数値解析では、定常流（時間依存の項 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ ）であっても、流体力学問題を解く場合、解の収束をよくするため $\frac{\partial u}{\partial t}$ および $\frac{\partial v}{\partial t}$ を考慮した、Unsteady-approach 法が一般に使用されるが、前報⁶⁾での計算結果から、著者が取扱った Reynolds 数範囲 ($R_e \leq 30$) の計算では $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ とした Steady-approach 法でも十分な結果が得られたので、ここでも Steady-approach 法を用いる。そうすると、この場合の基礎方程式は次に示す連続の方程式、Navier-Stokes の運動方程式およびエネルギー方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

ここで u および v はそれぞれ x 方向および y 方向の速度成分, P は圧力, T は流体温度, ρ , ν および k はそれぞれ流体の密度, 動粘性係数および温度伝導率である。また, 一般にエネルギー方程式は, 熱伝導は y 方向の温度変化が特に激しく, y 方向への熱伝導が支配的であるとして, x 軸方向の熱伝導項を無視したものが使用されるが, Gosh と Gess が指摘しているように温度境界層が厚くなるとこの仮定に問題が生じる。したがって (4) 式のエネルギー方程式は x 方向の熱伝導も考慮したものである。

数値解は普通無次元にして行なわれるので, 次の無次元数

$$\left. \begin{aligned} R_e &= \frac{u_0 h}{\nu}, \quad P_r = \frac{\nu}{k}, \quad X = \frac{x}{h} \\ Y &= \frac{y}{h}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0} \\ P &= \frac{p-p_0}{\rho u_0^2}, \quad \theta = \frac{T-T_0}{T_w-T_0} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を用いることにより (1) (2) (3) (4) 式はそれぞれ

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (7)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (8)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{P_e} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (9)$$

となる。ここで P_e は Peclet 数, $P_e = R_e \cdot P_r$ である。また,

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \varphi}{\partial X} \quad (10)$$

によって与えられる流れ関数 φ を導入すると, (6) 式の連続の方程式は自動的に満足し, (7) および (8) 式をそれぞれ Y および X で微分し圧力項を消去して整理すると

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (11)$$

渦度 ω に関する渦度輸送方程式となる。そうすると, 流れに関する方程式 (6) (7) (8) は (11) 式で満足される。

ここで, 渦度 ω は

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \right) \quad (12)$$

である。また, (9) 式は

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{1}{P_e} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (13)$$

となる。

したがって, 数値解は (11), (12) および (13) 式を解けばよいことになる。また, 仮定より, 流体の物性値は温度に依存せず一定であることから, (11), (12) の渦度輸送方程式と (13) 式のエネルギー方程式は独立である。結局, 流速と温度はそれぞれ独立に, (11), (12) 式の解から U と V を, そして (11), (12) 式の計算結果から得られる φ を用いて (13) 式 of 非線形項を線形化して数値解を行ない温度 θ に関する解を求めればよい。

2.3 境界条件

流れおよび熱輸送が中心軸に対して対称であるとすると, 境界条件は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} X=0; \quad U=1, \quad V=0, \quad \theta=0 \\ X=\infty; \quad U=6(Y-Y^2), \quad V=0, \quad \theta=1 \\ Y=0; \quad U=0, \quad V=0, \quad \theta=1 \\ Y=\frac{1}{2}; \quad \frac{\partial U}{\partial Y}=0, \quad V=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで, $X=\infty$ の点に関して, 実際の数値解では有限の領域を与えなければならない。流速に関しては, $X=0.06 \cdot R_e$ の点で流速は発達し, $X \geq 0.06 \cdot R_e$ の領域で分布は放物分布を保つことがすでに実験的にも解析的にも確かめられている。しかしながら, 温度に関しては, 物理的にはある有限の点 $X=X_1$ 以上の領域 ($X \geq X_1$) で温度分布は完全に発達し Y に無関係に一樣な温度分布 $\theta=1$ となるのが推測できるが, この発達点 $X=X_1$ がどのくらいの値を取るか未だわかっていない。したがって, $X=X_1$ の点をどこに定めるかがエネルギー方程式を解くための 1 つの問題となる。このことについての検討は 3.1.2 で行う。

(14) で示した境界条件を φ と ω に関して表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X=0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Y}=1, \quad \omega=0, \quad \theta=0 \\ X=X_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Y}=6(Y-Y^2), \quad \omega=-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}, \\ \theta=1 \\ Y=0; \quad \varphi=\text{一定}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X}=0, \quad \theta=1 \\ Y=\frac{1}{2}; \quad \varphi=\text{一定}, \quad \omega=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Y}=0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3. 数値解法

3.1.1 内部格子点についての差分式

計算領域は図 2 に示すような平行平板流路内の $0 \leq X \leq X_1$, $0 \leq Y \leq \frac{1}{2}$ の領域についてである。この領

域内を1辺がそれぞれ ΔX , ΔY の格子に分割し(図2および図3参照)

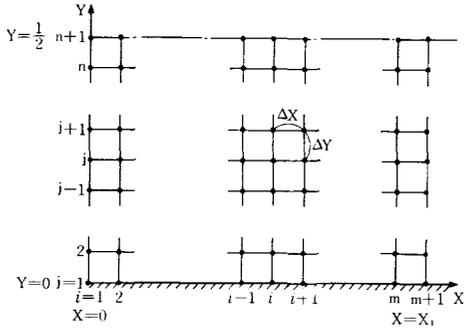


図2

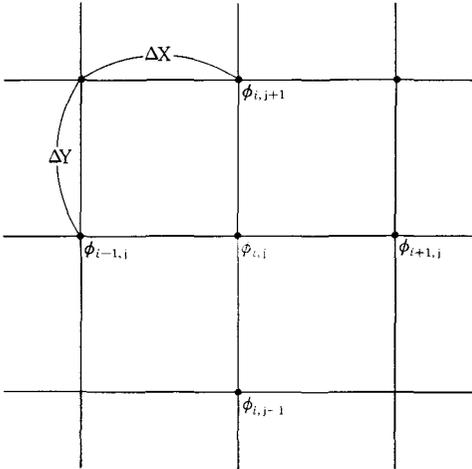


図3

各格子点についての微分を次のような差分近似で表わす。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_{i,j} &= \frac{\partial \phi_{i+1,j} - \partial \phi_{i-1,j}}{2(\Delta X)} + E_r((\Delta X)^2) \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)_{i,j} &= \frac{\partial \phi_{i,j+1} - \partial \phi_{i,j-1}}{2(\Delta Y)} + E_r((\Delta Y)^2) \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right)_{i,j} &= \frac{\partial^2 \phi_{i+1,j} - 2\partial \phi_{i,j} + \partial^2 \phi_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} \\ &+ E_r((\Delta X)^2) \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2}\right)_{i,j} &= \frac{\partial^2 \phi_{i,j+1} - 2\partial \phi_{i,j} + \partial^2 \phi_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \\ &+ E_r((\Delta Y)^2) \end{aligned} \right\} (16)$$

ここで, $E_r((\Delta X)^2)$ および $E_r((\Delta Y)^2)$ の項は, ΔX および ΔY の2次の微小項で, 微分を差分近似するこ

とによって生ずる誤差である。流れ関数 ϕ 、渦度 ω および温度 θ に関する導関数を(16)で示したような差分近似を使って表わすと, (11), (12)および(13)式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \omega_{i,j} &= \frac{1}{4}(\omega_{i+1,j} + \omega_{i,j+1} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j-1}) \\ &+ \frac{R_e}{16} [(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}) \\ &\quad - (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j})] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} &= \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1}) \\ &+ \frac{(\Delta h)^2}{4} \omega_{i,j} \end{aligned} \quad (18)$$

および

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} &= \frac{1}{8}(A_{i,j}\theta_{i+1,j} + B_{i,j}\theta_{i-1,j} + C_{i,j}\theta_{i,j+1} \\ &\quad + D_{i,j}\theta_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_{i,j} &= 2 - \frac{P_e \cdot (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})}{2} \\ B_{i,j} &= 2 + \frac{P_e \cdot (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})}{2} \\ C_{i,j} &= 2 + \frac{P_e \cdot (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})}{2} \\ D_{i,j} &= 2 - \frac{P_e \cdot (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})}{2} \end{aligned} \right\} (20)$$

である。分割格子は正方形を用いるので $\Delta X = \Delta Y = \Delta h = \frac{1}{n}$ であり, n は分割数である。(図2参照)

3.1.2 境界値および境界に対する差分式

境界条件(15)から, ϕ , ω および θ の境界値ならびに境界値を計算する差分式は次のように与える。

● ϕ について

$$\left. \begin{aligned} X=0; \phi_{1,j+1} &= \Delta h + \phi_{1,j} \\ &\quad (j=1 \dots n) \\ X=X_1; \phi_{m+1,j+1} &= \phi_{m+1,j} + 6(\Delta h) \\ &\quad (Y_j - Y_{j^2}) + 3(\Delta h)^2(1 - 2Y_j) \\ &\quad (j=1 \dots n) \\ Y=0; \phi_{1,1} &= \dots = \phi_{i,1} = \dots \\ &= \phi_{m+1,1} = 0 \\ Y=\frac{1}{2}; \phi_{1,n+1} &= \dots = \phi_{i,n+1} = \dots \\ &= \phi_{m+1,n+1} = 0.5 \end{aligned} \right\} (21)$$

● ω について

$$\begin{aligned}
 X=0; \omega_{1,1} &= \dots = \omega_{1,j} = \dots = \omega_{1,n+1} \\
 &= 0 \\
 X=X_1; \omega_{m+1,j} &= -(\varphi_{m+1,j+1} - 2\varphi_{m+1,j} \\
 &\quad + \varphi_{m+1,j-1}) / (\Delta h)^2 \\
 &\quad (j=1 \dots n) \\
 Y=0; \omega_{i,1} &= -2\varphi_{i,2} / (\Delta h)^2 \dots \dots (22-a) \\
 &\quad (i=2 \dots m) \\
 Y=\frac{1}{2}; \omega_{1,n+1} &= \dots = \omega_{i,n+1} = \dots \\
 &= \omega_{m+1,n+1} = 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

ここで $Y=0$ における ω に関する差分式(22-a)は $\varphi_{i,2}$ の未知数を含んでおり、 $Y=0$ (壁)での ω は初期値として与えることはできない。したがって、流れに関する数値解は(17)、(18)式に加えて(22-a)の3式を用いてなされる。

以上、 φ および ω についての境界値を計算する差分式を示したが、詳細については前報⁶⁾で検討してあるので参照されたし。

● θ について

$$\begin{aligned}
 X=0; \theta_{1,1} &= \dots = \theta_{1,j} = \dots \\
 &= \theta_{1,n+1} = 0 \\
 X=X_1; \theta_{m+1,1} &= \dots = \theta_{m+1,j} = \dots \\
 &= \theta_{m+1,n+1} = 1 \\
 Y=0; \theta_{2,1} &= \dots = \theta_{i,1} = \dots \\
 &= \theta_{m+1,1} = 1 \\
 Y=\frac{1}{2}; \theta_{i,n+1} &= \frac{1}{8}(A_{i,n+1}\theta_{i+1,n+1} \\
 &\quad + B_{i,n+1}\theta_{i-1,n+1} + 4\theta_{i,n}) \\
 &\quad \dots \dots (23-a) \\
 &\quad (i=2 \dots m)
 \end{aligned} \tag{23}$$

ここで、 $Y=\frac{1}{2}$ における差分式(23-a)は図4に示すような仮想点を考えることにより得たものである。

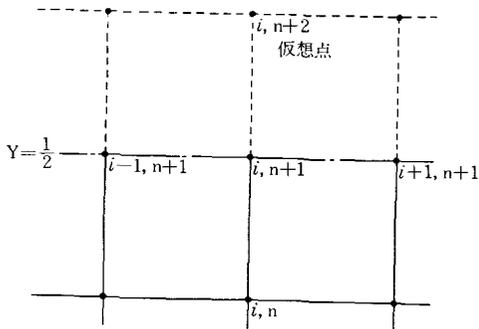


図4

仮想点を含めて、エネルギー方程式(13)を差分式で表わすと

$$\theta_{i,n+1} = \frac{1}{8}(A_{i,n+1}\theta_{i+1,n+1} + B_{i,n+1}\theta_{i-1,n+1} + C_{i,n+1}\theta_{i,n+2} + D_{i,n+1}\theta_{i,n}) \tag{24}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 A_{i,n+1} &= 2 - U_{i,n+1} \cdot P_e \cdot \Delta h \\
 B_{i,n+1} &= 2 + U_{i,n+1} \cdot P_e \cdot \Delta h \\
 C_{i,n+1} &= 2 - V_{i,n+1} \cdot P_e \cdot \Delta h \\
 D_{i,n+1} &= 2 + V_{i,n+1} \cdot P_e \cdot \Delta h
 \end{aligned} \tag{25}$$

である。(14)の境界条件から $Y=\frac{1}{2}$ では $V=0, \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0$ したがって

$$V_{i,n+1} = 0, \text{ よって } C_{i,n+1} = D_{i,n+1} = 2 \tag{26}$$

また

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \text{ よって } \theta_{i,n+2} - \theta_{i,n} = 0 \tag{27}$$

であるから、(24)式は(23-a)式となり $Y=\frac{1}{2}$ における差分式を得る。この(23-a)式もまた、 $\theta_{i+1,n+1}$ および $\theta_{i-1,n+1}$ の未知数を含んでおり、 $Y=0$ での ω と同様に、 $Y=\frac{1}{2}$ での θ は初期値として与えることはできない。したがってエネルギー方程式についての数値解は(19)ならびに(23-a)式を用いてなされる。ここで(21)、(22)、(23)で、 $m=2n \cdot X_1$ である。(図2参照)

● X_1 について

前に2.3で述べた境界条件 $X=\infty$ の点に関する有限領域 $X=X_1$ の値は次のような予備的な計算をすることにより定めた。図5に示すように、 $0 < X < X_1$ の領域では流路断面の温度分布は Y の関数 ($\theta = \theta(Y)$) であるが $X \geq X_1$ で分布は完全に発達した一様な温度分布 ($\theta = 1$) となることが考えられる。

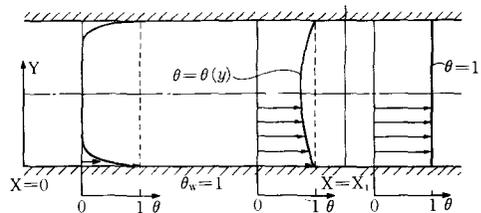


図5

そこで、この境界点 X_1 を適当に $X_1=10$ と定め(この値は W. H. Kay, R. Manohar らの計算結果から Nu 数のほぼ一定となる X より十分大きい値を選んだ)数値解を求めた。結果は図6に示すように $X \geq$

2.5 ($R_e=1$ について)の領域で温度分布は $\theta=1$ である。また $X_1 \geq 2.5$ のいくつかの値について数値解を行ない、それぞれの X_1 に対する数値解の結果を比較してみたところ、0.1%の誤差範囲で一致している。

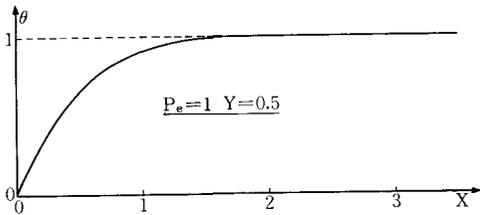


図 6

この予備計算の結果から、 X_1 を $P_e \leq 1$ では $X_1=3$ 、また $1 < P_e \leq 4$ では $X_1=5$ とした。

このようにして定めた境界条件に関して、この境界値のもとに求めた解が一意的であるかどうかについての数学的義論は別にして(流体の偏微分方程式の解の一意性については数学的には未だ明らかでない)、物理的には適当なものであると考える。

3.2 計算手順と反復式

実際に行なう数値解は反復法を用いる。それぞれの差分式についての反復式は、流れに関する(17)、(18)および(22-a)式について

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{(n+1)} = & \omega_{i,j}^{(n)} + \xi \left\{ \frac{1}{4} (\omega_{i+1,j}^{(n)} + \omega_{i,j+1}^{(n)} + \omega_{i-1,j}^{(n+1)} \right. \\ & + \omega_{i,j-1}^{(n+1)}) + \frac{R_e}{16} [(\varphi_{i+1,j}^{(n)} - \varphi_{i-1,j}^{(n+1)}) (\omega_{i,j+1}^{(n)} \\ & - \omega_{i,j-1}^{(n+1)}) - (\varphi_{i,j+1}^{(n)} - \varphi_{i,j-1}^{(n+1)}) (\omega_{i+1,j}^{(n)} - \omega_{i-1,j}^{(n+1)})] \left. - \omega_{i,j}^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{(n+1)} = & \varphi_{i,j}^{(n)} + \xi \left\{ \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j}^{(n)} + \varphi_{i,j+1}^{(n)} + \varphi_{i-1,j}^{(n+1)} \right. \\ & + \varphi_{i,j-1}^{(n+1)}) + \frac{(Dh)^2}{4} (\omega_{i,j}^{(n)} - \varphi_{i,j}^{(n)}) \left. \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

および

$$\omega_{i,1}^{(n)} = -2\varphi_{i,2}^{(n)} / (Dh)^2 \quad (30)$$

また、温度に関する(19)および(23-a)式について

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{(n+1)} = & \theta_{i,j}^{(n)} + \xi \left[\frac{1}{8} (A_{i,j} \theta_{i+1,j}^{(n)} + B_{i,j} \theta_{i-1,j}^{(n+1)} \right. \\ & + C_{i,j} \theta_{i,j+1}^{(n)} + D_{i,j} \theta_{i,j-1}^{(n+1)}) - \theta_{i,j}^{(n)} \left. \right] \end{aligned} \quad (31)$$

および

$$\begin{aligned} \theta_{i,n+1}^{(n+1)} = & \theta_{i,n+1}^{(n)} + \xi \left[\frac{1}{8} (A_{i,n+1} \theta_{i+1,n+1}^{(n)} \right. \\ & + B_{i,n+1} \theta_{i-1,n+1}^{(n+1)} + 4\varphi_{i,n+1}^{(n+1)}) - \theta_{i,n+1}^{(n)} \left. \right] \end{aligned} \quad (32)$$

である。ここで上添の(n)は反復回数、 ξ は緩和係数である。そして計算は(28)、(29)、(30)式で流速分布を求めその結果を用いて(31)、(32)式で温度分布を求める。その計算手順を次に示す。

1) (28)、(29)、(30)式で流れについての数値解を求める。

(この計算手順の詳細は前報⁶⁾で述べてあるので、ここでは省略する。)

2) 3.1.2 で述べたように θ についての境界値を与える。未知数である内部点はすべて零とする。ただし数値解は P_e 数を順次上げて解いてゆくの、収束を早めるため、次の P_e 数の計算に用いる内部点の値は先に求めた P_e 数の小さいときの結果を初期値として採用する。

3) 1) で求めた φ を用いて(31)式で内部点の θ を計算する。

4) 1)、3)で求めた φ および θ を用いて(32)式で中心軸上の θ を計算する。

5) 3)、4)の計算過程を次の条件を満足するまで繰返えし行なう。

$$|\theta_{i,j}^{(n+1)} - \theta_{i,j}^{(n)}| / |\theta_{i,j}^{(n)}| \leq 10^{-5} \quad (33)$$

ここで、(33)式の判定は任意に選んだ40の格子点で行なった。

6) 5)の条件を満足したときの θ の値を解とする。そして、1)にもどって次の R_e および P_e 数の流れおよび温度に関する数値解を行なう。

4. 計算結果と考察

流れについてはすでに前報⁶⁾で報告したが、参考のため、図7に得られた結果のうち $R_e=1$ を選んで流れの発達の様子について示す。

流れは通常凸状 ($\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} < 0$) の流速分布で発達してゆく。

温度分布に関する数値解は次のような R_e 数と P_e 数の組合せについて行なった。(表1参照)

図8は得られた結果の内 $P_e=0.1$ と $P_e=4$ を選んで温度分布の発達の様子を示したものである。図から明らかに、温度分布の発達は P_e 数の小さいものほどその発達は早い。

この理由として、小さな P_e 数流れは P_e 数の小さな流体流れ、いいかえれば、温度伝導率の大きな流体の流れである。このことから考えて、この傾向は実際に起りうるものと思う。また、図9は中心軸上での温度の発達の様子を示したものである。

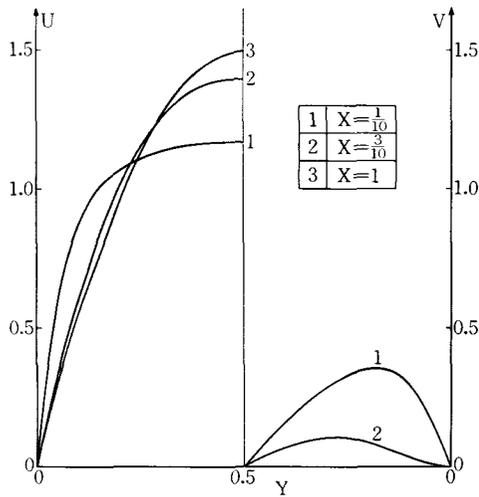


図7

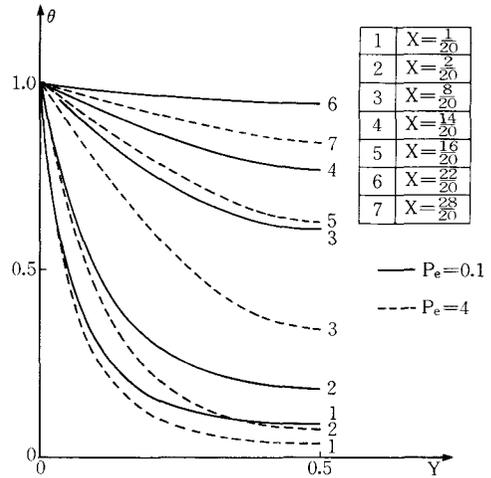


図8

表1

P_e 数	R_e 数	P_r 数
0.1	1	0.1
	5	0.02
	20	0.005
0.4	1	0.4
	5	0.08
	20	0.02
1	1	1
	5	0.2
	20	0.05
4	1	4
	5	0.8
	20	0.2

当然のことながら、やはりその発達には P_e 数の小さいものほど早い。ここで、図中の点線は速度分布の発達点(助走区間長 L)を示したものである。図から、流速分布と温度分布の発達を比較すると速度分布の方が早く発達していることがわかる(図7, 8両図からもわかる)。このことに関して、一般に温度境界層厚さ δ_t と速度境界層厚さ δ の比は $\delta_t/\delta \approx 1/P_r^{1/2}$ ($P_r \geq 1$) の

関係が使用される(境界層の厚さは分布の発達の尺度と考えることができる)。そうすると $P_r=1$ の場合速度・温度両境界層の厚さは等しく、両分布の発達は等しいかあるいはさほど異なったものとはならないことが考えられるが、著者の計算結果では速度分布の発達がかなり早い。この理由として考えられることは、 $\delta_t/\delta = 1/P_r^{1/2}$ の関係は R_e 数の大きな場合についての解析結果であることによるものであろう。

数値解は表1に示したように、それぞれの P_e 数に対し、3つの R_e 数と P_r 数の組合せについて行なったが、この組合せの違いによる誤差は小さく、1.5%以下である。したがって、著者の計算した P_e 数範囲では P_e 数について相則則が成立つと考える。

さらにこのことについて、計算結果を厳密に見ると P_e 数を一定として図8, 図9で示した図上では同一曲線上に一致する θ の値に $\theta_{R_e=20} > \theta_{R_e=5} > \theta_{R_e=1}$ の関係がある。これは R_e 数の大きい、すなわち、流れの早いものほど対流によるエンタルピー輸送が大きくなるからであろう。

図10はこの誤差について各 P_e 数ごとにいくつかの場合について示したものである(中心軸上)。

図から、誤差は流路入口近くで、また P_e 数が大きくなるにしたがって大きくなる。この理由を考えると、 P_e 数が大きくなるにしたがいエンタルピー輸送項の影響が大きくなるからであろう。これとは逆に誤差の小さな $P_e=0.1$ の場合の流れは、 P_r 数が小さな流れであり、エネルギー方程式のエンタルピー輸送項に比べて熱伝導項が支配的である。したがって、数値

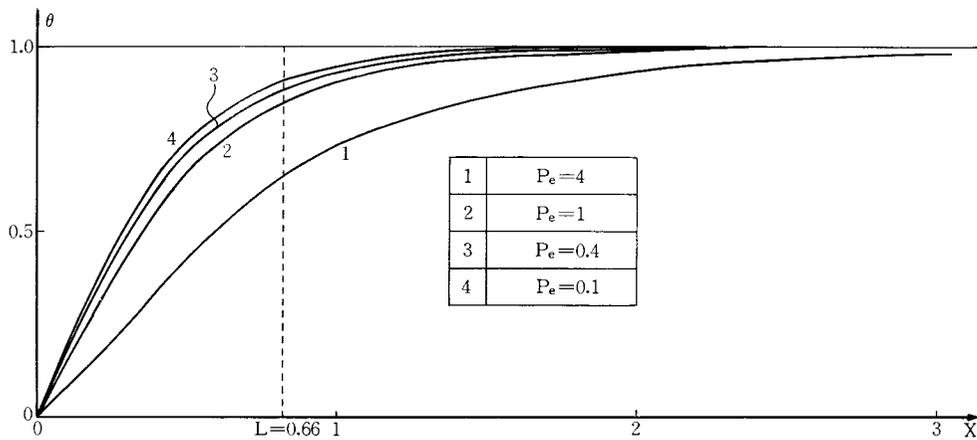


図 9

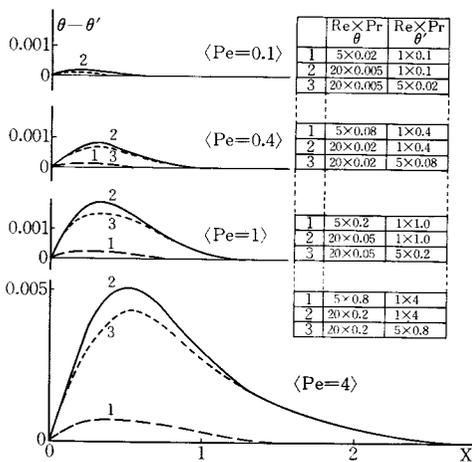


図10

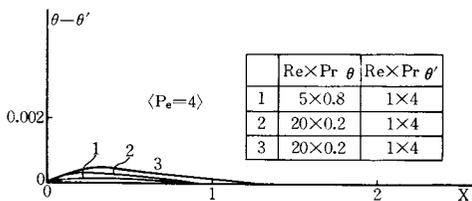


図11

解を求める際、エンタルピー輸送項は無視できるほど小さく対流成分 U, V の違いはさほど結果に影響をおよぼさないことが考えられる。また得られた結果の内では一番誤差の大きい $Pe=4$ の場合について見ると、 $Re=5$ および $Re=1$ として得られた両者の結果を比較すると誤差はほとんどなく、 $Re=20$ と $Re=5$ 、 $Re=20$ と $Re=1$ と速度差の大きくなる程誤差は大きいことから考えてもこの誤差はエンタルピー輸送項の影響度合によるものと考えられる。

図11は壁面近傍 ($Y=0.09$) について、図10と同様の誤差曲線を示したものである。

図からわかるように、壁面近傍ではほとんど誤差は見られない ($Pe=0.1, 0.4$ および 1 は誤差がない)。

これは、すでに知られていることだが壁面近くでは特に熱伝導が支配的であり、この程度の Re 数の違いはほとんど影響をおよぼさないからであろう。

しかしながら、以上示した誤差はいずれも無視できる程小さく、 $Pe \leq 4$ の範囲で温度分布は Pe 数について相似則が成立つことが言える。しかし、 Pe 数の増加とともにエンタルピー輸送項と熱伝導項が、特に流路入口近傍では V 成分も加わり複雑に影響しあうので、どの程度の Pe 数まで相似則が成立つか推則できない。

5. 結 果

得られた結果を次のようにまとめる。

- 1) $Pe \leq 4$ の範囲では流速分布は温度分布の発達より早い。
- 2) 温度分布の発達は Pe 数に依存して、 Pe 数の小

さいものほどその発達はやい。

3) $Pe \leq 4$ の範囲では温度分布は Pe 数について相似則が成立する。

最後に、得られた結果は流体物性値が温度に依存しないとして、運動方程式とエネルギー方程式を独立としたものである。しかし実際の現象はわずかであっても物性値の変化が起っているはずであり、このことを考慮した計算を行なってみる必要がある。

謝 辞

この研究を行なうにあたり、有益な御助言を頂いた川島和俊教授に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) H. L. Langhaar: J. Appl. Mech., 9 (1942), A-55.
- 2) W. M. Kays: Trans. A. S. M. E., 77 (1955), 1265.
- 3) D. L. Ulrichson, R. A. Schmits: Int. J. Heat Mass Transfer, 8 (1965), 253.
- 4) R. Manohar: Int. J. Heat Mass Transfer, 12 (1969), 15.
- 5) 黒崎晏夫: 日本機械学会論文集, 36—290 (1970), 1719.
- 6) 中西助次: 広島工大研究紀要, 12—16 (1978), 107.