

小さな Reynolds 数における平行平板間の 助走区間流れについての数値解**

中 西 助 次*

(昭和52年9月24日受理)

Numerical Solution for Entrance Region of Flow Between Parallel Flat Plates at Small Reynolds Number

By Suketsugu NAKANISHI

(Received Sept. 24, 1977)

Numerical solutions were obtained with regarding to the flow in the inlet section between parallel flat plates by using a vorticity-transport equation under the assumptions of viscous incompressible fluid. As the results, the dependencies of velocity profile and inlet length on the Reynolds number, which were varied from 0.1 to 30, were found as follows: 1) the velocity profiles were concave in the central part of flow at the initial stage of development except for the low Reynolds number; 2) the inlet length was weakly dependent on the Reynolds number at the range less than about $Re_c=8$, beyond which the inlet length increased with the Reynolds number.

1. ま え が き

円管および平行平板間の助走区間流れに関する研究は、Bousinesq 以来現在まで、解析的あるいは実験的にかかなり多くの報告がある。この理由としては、流体力学の分野あるいは熱交換機などに関する伝熱工学の分野での実用面、および血液循環、呼吸器あるいは泌尿器系などの生理流体力学¹⁾²⁾ に関しても興味ある問題であるからであろう。また電子計算機の発達にともない、差分法や有限要素法などの手法を用いて直接数値解が得られる³⁾⁴⁾ ようになったことも理由として上げることができる。

たとえば、J. R. Bodoia は円管に関して、W. Honbek は平行平板について、それぞれ差分法を用い

て流速分布を、また W. M. Kays は H. L. Langhaar の解析解⁵⁾ による流速分布を用いてこの区間においての熱伝達に関する数値解⁶⁾、そして R. Manohar はこれらの報告の結果に対して精度を検討すると同時に流速分布と熱伝達に関する数値解⁷⁾ を、また黒崎は平行平板間でふく射と対流が共存する流れについて J. R. Bodoia と同じ差分法を用いて数値解⁸⁾ を報告している。しかしながら、これらの報告は境界層理論の成立つ大きな Reynolds 数の範囲に関したものである。Y. L. Wang, P. A. Longwell らは Navier-Stokes のどの項も消去することなく、Reynolds 数300において平行平板についての数値解を求めている⁹⁾。その結果をみると、流路入口付近の流速分布が他の結果と比べて多少異なっているが、助走距離 ℓ に関しては境界層理

* 物理学教室。

** 昭和52年9月17日広島工業大学研究発表会にて発表。

論の手法による解析解、数値解そして実験においても確かめられている $\ell = C \cdot R_e \cdot d$ (d : 円管直径あるいは平行平板間距離; R_e : 代表長さを d , 代表流速を平均流速に選んだ Reynolds 数; C : 約0.06~0.068の値をとる定数) とほとんど一致している。

ところが、一方、慣性項が粘性項に比べて無視し得るほど小さなあるいは同程度の低 Reynolds 数の流れについては、助走区間の流れの状態および助走距離がどうなっているか興味ある問題であるが、高 Reynolds 数に比べてこのことに関する報告は少なく、著者の知る限りにおいては章莖¹⁰⁾によって報告されているだけである。彼は円管について解析解を行い、その結果として助走距離 ℓ は Reynolds 数が約10以下の範囲では Reynolds 数に無関係に $\ell = 0.565 \cdot d$ であることを報告している。しかしながら、この解析解は粘性項に比べ慣性項が無視できるものとし、Navier-Stokes の方程式の慣性項を消去したものである。このことに対し『この種の問題では解析的に厳密解を求めるのは困難と思われるので、むしろ電子計算機を用いた数値解法を試みられてはいかかが』*という討論がなされているが、その後著者の調べた限りにおいては現在のところ数値解の報告はなされていないようである。

そこで、平行平板間の助走区間流れに関し Reynolds 数0.1から30までの数値解を差分法(反復法)で求め章莖の解析結果と比較する。

2. 計算モデル、基礎方程式および境界条件

2.1 計算モデル

数値解に用いたモデルは間隔 h で置かれた2次元平行平板流路内での非圧縮性流体流れである。流れは定常な2次元層流であり、流路入口では圧力 p_0 、平板に平行に流速 u_0 の一様な速度分布で流入するものとする。座標は図1に示すように流路入口を原点に、流れ方向の平板壁に沿って x 、それに垂直に y を選ぶ。また流れに外力は働かないとする。

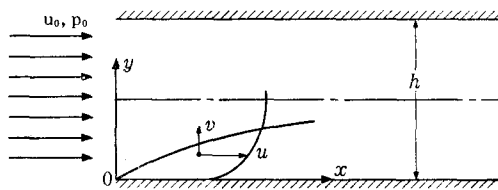


図 1

* 伊藤英覚(東北大)による質問。原文のまま。

2.2 基礎方程式

この場合の基礎方程式は次に示す連続の式と運動方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

ここで u および v はそれぞれ x 方向および y 方向の速度成分、 ρ は流体の密度、 ν は動粘性係数、 P は圧力である。

数値計算では普通無次元に行なわれるので、次の無次元数

$$\left. \begin{aligned} R_e &= \frac{u_0 h}{\nu}, \quad X = \frac{x}{h}, \quad Y = \frac{y}{h} \\ U &= \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}, \quad P = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を用いることにより(1)(2)(3)式はそれぞれ

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (6)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (7)$$

となる。また、

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (8)$$

によって与えられる流れ関数 ψ を導入し、(6)および(7)式をそれぞれ Y および X で微分し、これらの式から圧力項を消去して整理すると、(5)、(6)および(7)式は温度 ω に関する温度輸送方程式

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (9)$$

となる。ここで温度 ω は

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \quad (10)$$

である。

したがって、数値解は ψ と ω を未知数として(9)および(10)式を解けばよい。また(9)式に(10)式を代入することにより ψ に関する1変数の方程式を得るが、これは2変数に比べて収束および精度の点で劣ることが川口³⁾によって明らかにされており、この報告における計算も(9)、(10)式を用いた2変数について行う。

2.3 境界条件

境界条件は、流れが中心軸に対して対称であるとし、とき次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} X=0 : U=1, V=0 \\ X=\infty : U=6(Y-Y^2), V=0 \\ Y=0 : U=0, V=0 \\ Y=\frac{1}{2} : \frac{\partial U}{\partial Y}=0, V=0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、境界条件 $X=\infty$ に対して与えた流速分布は放物分布としている。また、(11)で示した境界条件を ϕ と ω に関して表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X=0 : \frac{\partial \phi}{\partial Y}=1, \omega=0 \\ X=\infty : \frac{\partial \phi}{\partial Y}=6(Y-Y^2), \omega=-\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \\ Y=0 : \phi=\text{一定}, \frac{\partial \phi}{\partial X}=0 \\ Y=\frac{1}{2} : \phi=\text{一定}, \omega=0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. 数値解法

3.1.1. 内部格子点についての差分式

平行平板流路内を図2(a), (b)に示すような1辺 Δh の正方形格子に分割し、

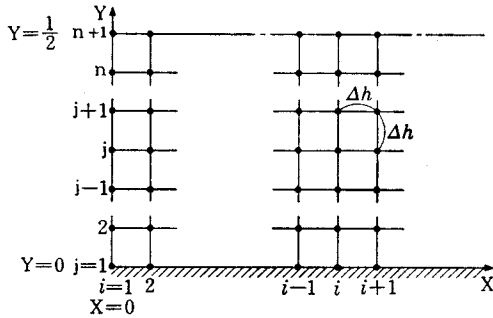


図2(a)

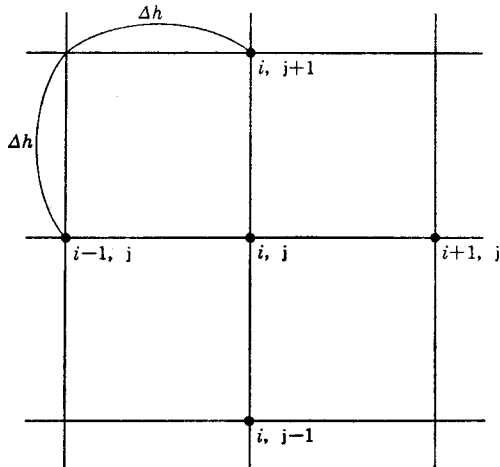


図2(b)

各格子点についての微分を次のような差分近似で表わす。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2(\Delta h)} + O((\Delta h)^2) \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta h)^2} + O((\Delta h)^2) \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2(\Delta h)} + O((\Delta h)^2) \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right)_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta h)^2} + O((\Delta h)^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 $O((\Delta h)^2)$ の項は Δh の2次の微小項で、微分を差分近似することによって生ずる誤差である。渦度に関する導関数 $\partial \omega / \partial X$, $\partial^2 \omega / \partial X^2$, $\partial \omega / \partial Y$ および $\partial^2 \omega / \partial Y^2$ も(13)と同様な差分で表わすと、(9)および(10)式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \omega_{i,j} &= \frac{1}{4}(\omega_{i+1,j} + \omega_{i,j+1} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j-1}) \\ &+ \frac{R_e}{16} [(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}) \\ &- (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j})] \quad (14) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} &= \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1}) \\ &+ \frac{(\Delta h)^2}{4} \omega_{i,j} \quad (15) \end{aligned}$$

となる。したがって、(14), (15)式を用いて ϕ および ω を求めることができる。ここで $\Delta h = \frac{1}{n}$ であり、 n は分割数(図2(a)参照)である。

3.1.2. 境界値および境界に対する差分式

境界条件(12)から ϕ および ω の境界値ならびに境界値を計算する差分式は次のように与えられる。

● ϕ について

$$\left. \begin{aligned} X=0 : \phi_{1,j+1} &= \Delta h + \phi_{1,j} \\ &\quad (j=1 \cdots n) \\ X=\infty : \phi_{\infty,j+1} &= \phi_{\infty,j} + 6(\Delta h)(Y_j - Y_j^2) \\ &\quad + 3(\Delta h)^2(1 - 2Y_j) \\ &\quad (j=1 \cdots n) \\ Y=0 : \phi_{1,1} &= \cdots = \phi_{i,1} = \cdots = \phi_{\infty,1} = 0 \\ Y=\frac{1}{2} : \phi_{1,n+1} &= \cdots = \phi_{i,n+1} = \cdots = \phi_{\infty,n+1} \\ &= 0.5 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、 Y_j は $Y_j = (\Delta h)(j-1)$ である(図2(a)参照)。また、 $X=\infty$ の点については次の考慮をした。この点の ϕ の値は(15)式の差分式

$$\phi_{\infty,j+1} = 2(\Delta h)[\phi_{\infty,j-1} + 6(Y_j - Y_j^2)]$$

から計算することができる。しかしながら、この式を用いると、平板壁の境界値($\phi_{\infty,1}=0$)を用いて計算を始めて順次1つおきの格子点(図3の○印)の値を求

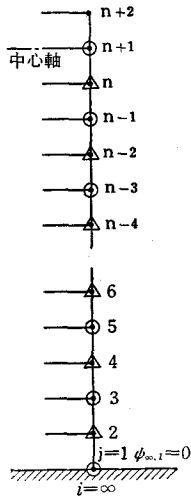


図 3

め、残る格子点 (図3の△印) は中心軸における境界条件 ($\partial\phi/\partial Y=0$; $\phi_{\infty, n+2}=2\phi_{\infty, n+1}-\phi_{\infty, n}$, $\phi_{\infty, n+1}=0.5$) を用いて格子点 (∞, n) から順次 $(\infty, 2)$ まで計算してゆくことになる。そうすると差分近似の誤差 $O((\Delta h)^2)$ が影響して、隣接する格子点間の値の滑らかさを欠く結果となる。そこで、(16) で与えた差分式はこのことを考慮して、 $\partial\phi/\partial Y=6(Y-Y^2)$ とこれを微分した $\partial^2\phi/\partial Y^2=6-12Y$ の2式についての差分式から得たものである。

● ω について

$$\left. \begin{aligned} X=0 : \omega_{1,1} &= \dots = \omega_{1,j} = \dots = \omega_{1,n+1} = 0 \\ X=\infty : \omega_{\infty,j} &= -(\phi_{\infty,j+1} - 2\phi_{\infty,j} \\ &\quad + \phi_{\infty,j-1}) / (\Delta h)^2 \\ Y=0 : \omega_{i,1} &= -2\phi_{i,2} / (\Delta h)^2 \\ Y=1/2 : \omega_{1,n+1} &= \dots = \omega_{i,n+1} = \dots \\ &= \omega_{\infty,n+1} = 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

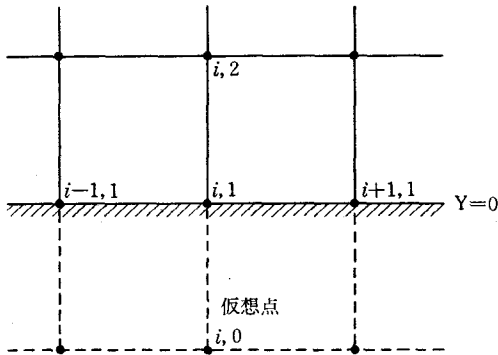


図 4

ここで、 $Y=0$ における差分式は図4に示すように仮想点を考える³⁾¹¹⁾ ことにより得たものである。

仮想点を含めて、温度 ω の式(10)を差分式で表わすと

$$\omega_{i,1} = -(\phi_{i+1,1} + \phi_{i-1,1} + \phi_{i,2} + \phi_{i,0} - 4\phi_{i,1}) / (\Delta h)^2 \quad (18)$$

(12), (16)の境界条件から $Y=0$ では

$$\phi = \text{一定}; \phi_{i-1,1} = \phi_{i,1} = \phi_{i+1,1} = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y} = 0; \phi_{i,2} - \phi_{i,0} = 0$$

であるから、(18)式は

$$\omega_{i,1} = -2\phi_{i,2} / (\Delta h)^2 \quad (19)$$

となり $Y=0$ における ω の差分式を得る。また、 $\phi_{i,2}$ が未知数であるので壁での ω は初期値として与えることはできない。したがって、実際に行う数値解は(14), (15)さらに(19)式を用いてなされる。

以上述べたように、平板壁の ω を除いて、すべての境界値を与えることができる。

3.2. 計算手順と反復式

計算に用いた格子間隔 Δh は1/30である。境界値の計算は差分近似誤差を考慮して格子間隔1/300で行い、 $\Delta h=1/30$ に相当する格子点の値を用いる。そうすることで境界値の誤差が解におよぼす影響をさけた。また $X=\infty$ の点に関して、実際の数値解では有限の領域を与えなければならない。計算は $R_0=30$ までであるので $L=0.06 \cdot R_0$ ($L=l/h$) から $X=\infty$ の点を $X=2$ と定めた。

数値解は反復法を用い、(14), (15)および(19)式に関する反復式は

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{(n+1)} &= \omega_{i,j}^{(n)} + k \left\{ \frac{1}{4} (\omega_{i+1,j}^{(n)} + \omega_{i,j+1}^{(n)} + \omega_{i-1,j}^{(n)} \right. \\ &\quad + \omega_{i,j-1}^{(n)}) + \frac{R_0}{16} [(\phi_{i+1,j}^{(n)} - \phi_{i-1,j}^{(n)}) (\omega_{i,j+1}^{(n)} \\ &\quad - \omega_{i,j-1}^{(n)}) - (\phi_{i,j+1}^{(n)} - \phi_{i,j-1}^{(n)}) (\omega_{i+1,j}^{(n)} \\ &\quad - \omega_{i-1,j}^{(n)})] - \omega_{i,j}^{(n)} \left. \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{(n+1)} &= \phi_{i,j}^{(n)} + k \left\{ \frac{1}{4} (\phi_{i+1,j}^{(n)} + \phi_{i,j+1}^{(n)} + \phi_{i-1,j}^{(n)} \right. \\ &\quad + \phi_{i,j-1}^{(n)}) + \frac{(\Delta h)^2}{4} \omega_{i,j}^{(n)} - \phi_{i,j}^{(n)} \left. \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

および

$$\omega_{i,1}^{(n)} = -2\phi_{i,2}^{(n)} / (\Delta h)^2 \quad (22)$$

である。ここで上添の (n) は反復回数、 k は緩和係数 ($k=1.2$; 過緩和係数、ただし $R_0=26$ のとき解が発散したので、これをふせぐため $R_0 \geq 26$ の計算は $k=0.9$; 不足緩和係数³⁾) である。

そして、計算は次に示す手順で行う。

i) 3.1.1.で述べたように境界値を与える。未知数である内部点はすべて零とする。ただし、数値解は R_e 数を順次上げて解いてゆくの、収束を早めるため、次の R_e 数の計算に用いる内部点の値は先に求めた R_e 数の小さいときの結果を初期値として採用する。

ii) (2)式で ϕ の計算をする。

iii) ii) で求めた ϕ を用いて(2)式で壁での ω を計算する。

iv) ii), iii) で求めた ϕ および ω を用いて(2)式で内部点の ω を計算する。

v) ii), iii), iv) の計算過程を次の2つの条件を満足するまで繰返し行なう。

$$|\phi_{i,j}^{(n+1)} - \phi_{i,j}^{(n)}| / |\phi_{i,j}^{(n+1)}| \leq 10^{-5} \quad (23)$$

$$|\omega_{i,j}^{(n+1)} - \omega_{i,j}^{(n)}| / |\omega_{i,j}^{(n+1)}| \leq 10^{-5} \quad (24)$$

ここで、(23), (24)式の判定はそれぞれ任意に選んだ20の格子点で行なった。

vi) v) の条件を満足したときの ϕ および ω の値を解とし、(8)式に関する差分式

$$U_{i,j} = (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) / 2(\Delta h) \quad (25)$$

$$V_{i,j} = -(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) / 2(\Delta h) \quad (26)$$

で流速分布を求め、i) にもどって次の R_e 数の数値解を行なう。

4. 計算結果と考察

図5は得られた結果のうち、 $R_e=4$ と $R_e=30$ を

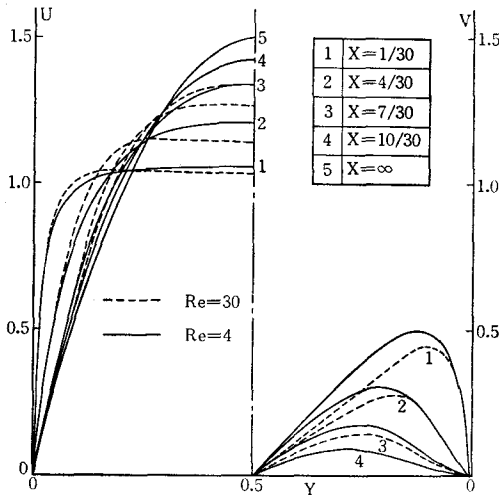


図 5

選んで、流れの発達の様子について示したものである。

図から、 $R_e=4$ の場合、普通考えられる凸状 ($\frac{\partial^2 U}{\partial^2 Y} < 0$) の流布分布で発達してゆくが、 $R_e=30$ では、流れの発達初期段階で、中心領域の流速分布が凹状 ($\frac{\partial^2 U}{\partial^2 Y} > 0$) となる傾向がみられる。図には示していないが、この傾向は $R_e=19$ をはさんで $R_e < 19$ では $R_e=4$, $R_e > 19$ では $R_e=30$ の場合と同様な傾向である。また、 $R_e < 19$ の範囲では R_e 数の変化に対して流速分布はさほどに変化しないが、 $R_e > 19$ の範囲では R_e 数が増加するにしたがい流速分布の凹状となる傾向は顕微となる。発達初期段階で流速分布が凹状となる現象に関して、Y. L. Wang, P. A. Longwell⁹⁾ らも同様な結果を得ているが彼らの結果と比較して著者の場合それほど顕微ではない(図6参照)。

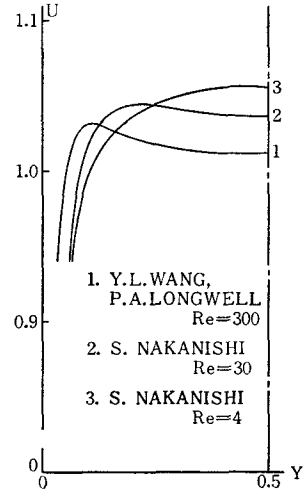


図 6

この理由として考えられることは、著者の $R_e=30$ に比べて彼らの場合は大きな R_e 数 ($R_e=300$) における計算結果であることによるものであろう。また、彼らはこの流速分布凹状現象に対し、あらい格子間隔を用いた予備的な計算結果から、また $X=0$ における流速分布が一様でないとしたときの計算結果においても同様な傾向を得ていることからして、実際に起こっている現象であると考えているが物理的意味がどうであるかについてはふれていない。

図7は助走距離 L と R_e 数の関係を示したものである。図から明らかに、助走距離 L の R_e 数に対する依存度は小さな R_e 数ではきわめて小さく、 L はほぼ一定の値である。このことは葦埜¹⁰⁾ の解析解と定

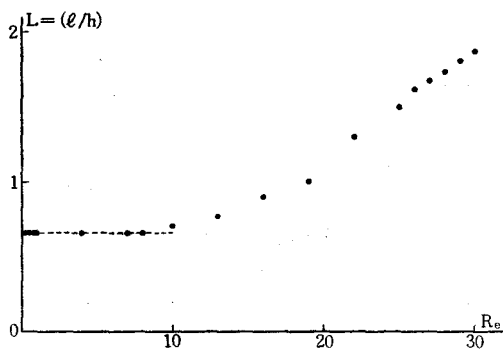


図 7

性的に一致する。ただし、彼はその Re 数範囲を $Re \leq 10$ としているが著者の計算では $Re \leq 8$ であり $Re = 10$ においてはわずかに増加の傾向を示す。わずかではあるがこの Re 数範囲の違いは彼の解析解が慣性項を消去していることによるものであろう。

$Re = 8$ を過ぎると L は Re 数が増加するにしたがいゆっくりと増加しはじめ、その増加割合は Re 数とともに大きくなる。しかしながら、このオーダの Re 数では粘性力と慣性力が同程度に影響する複雑な流れの領域であり、 $Re > 30$ においてどのような傾向となるかはわからない。強いて推測すれば、 Re 数の増加に共ないすでに他の研究者によって明らかにされている $L = 0.06 \cdot Re$ の直線に接近することが予想される。

また $Re \leq 8$ の範囲における L の値は葦荻の求めた $L = 0.565$ (円管について) に比べて $L = 0.66$ と若干大きい。このことは平行平板よりも円管の方が流れの発達早いことを意味する。この理由として、平行平板では二枚の平板壁から境界層が発達するのに対し円管の場合、それは周囲から発達することが考えられる。

5. 結 論

得られた結果を次のようにまとめる。

- 1) 助走距離 L は $Re \leq 8$ では Re 数に無関係に $L = 0.66$ の値をとる。また $Re > 8$ では L は Re 数と共に増加する。
- 2) 流速分布は Re 数19をはさんで $Re < 19$ では普通考えられる凸状の流速分布で発達してゆくが、 $Re > 19$ では発達初期の段階で中心領域の流速分布は凹状となる。

最後に、得られた結果は他の結果と比べて傾向的に一致するものである。しかしながらこれらの傾向について物理的意味がどうであるか検討を要する。

一 謝 辞

この研究を行うについて、いろいろと御指導頂いた前川力教授、川島和俊教授ならびに二神種弘氏、そして電算機の使用にあたって、心よく御助力頂いた村田弘志氏に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 松信八十男：日本機械学会誌，76—656 (1973)，1008.
- 2) 松信八十男：日本機械学会誌，76—660 (1973)，1400.
- 3) 日本機械学会編：流体工学における数値解の基礎と応用，(1976).
- 4) 川口光年，高見頼郎編集：物理学会論文選集174，日本物理学会，(1971).
- 5) H. L. Langhaar: J. Appl. Mech., 9 (1942), A-55.
- 6) W. M. Kays: Trans. A. S. M. E., 77 (1955), 1265.
- 7) R. Manohar: Int. J. Heat Mass Transfer, 12 (1969), 15.
- 8) 黒崎晏夫：日本機械学会論文集，36—290 (1970)，1719.
- 9) Y. L. Wang, P. A. Longwell: A. I. Ch. E. J., 10-3 (1964) 323.
- 10) 葦荻 勲：日本機械学会論文集，37—302 (1971)，1972.
- 11) T. Futagami: HIT-C-EH-1, Dept. of Civ. Engng. Hiroshima Inst. of Tech., (1976).