

# ディジタルフィルタの一近似問題\*\*

重 広 孝 則\*

昭和51年9月30日受理

## An Approximation Problem of Digital Filter

Takanori SHIGEHIRO

(Received Sept. 30, 1976)

With regard to the transfer function of digital filter, some approximation methods in frequency domain have been developed.

The approximation method described in this paper is the way that provides the fundamental function into both the numerator and the denominator of magnitude-squared transfer function and expands the fundamental function in Fourier-series, in order to realize a small ripple at the pass band.

Moreover, the fundamental function which has a fairly rapid convergence of Fourier-series expansion is also represented.

Examples of low pass filters designed by this approximation method are shown.

### 1. ま え が き

ディジタルフィルタの伝達関数は、一般に式(1)のような多項式で示される。

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、式(1)は式(1-a)に示す non-recursive form と式(1-b)に示す Purely-recursive form を含むとする。

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \dots\dots\dots(1-a)$$

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} \dots\dots\dots(1-b)$$

任意の伝達関数を周波数領域で直接近似する方法として、従来から良く知られている Transversal 型フィルタの近似方法<sup>1)</sup>、あるいは、Johnson<sup>2)</sup> や Maenhout 等<sup>3)</sup> により新しい近似方法が提案されている。

Transversal 近似は式(1-a)の non-recursive form

に限定されたものであるが、Johnson 等の方は式(1)にも適用できる一般的な手法である。また、Johnson 等の方法では、近似の際、フーリエ級数の打ち切り誤差以外に Maclaurin 展開による打ち切り誤差の影響も含んだ近似誤差となる<sup>4)</sup>。

本文では、伝達関数の絶対値自乗に注目し、この絶対値自乗に分子、分母を設け、近似誤差を小さくするように、それぞれに同じ基本関数を導入する近似方法を提案する。

さらに、フーリエ級数係数の収束性から、もっとも速く収束するような絶対値自乗の基本関数を検討している。

### 2. 絶対値自乗特性の近似

図1(a)に理想低域フィルタの絶対値自乗特性を示

\* 電子工学科

\*\* 昭和51年9月18日広島工業大学研究発表会にて発表

す。図1(a)に示す理想低域フィルタの絶対値自乗関数をフーリエ級数展開すると、次式のごとくなる。

$$|H(z)|^2 = \left( a_0 Z^N + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2} Z^{N+n} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2} Z^{N-n} \right)^2 / Z^{2N} \dots\dots\dots(2)$$

但し、 $N$  : フーリエ級数打ち数

$a_n$  : フーリエ級数係数

$Z = e^{j\omega T}$   $T$  : サンプルング時間

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$   $\omega_c$  : シャ断周波数

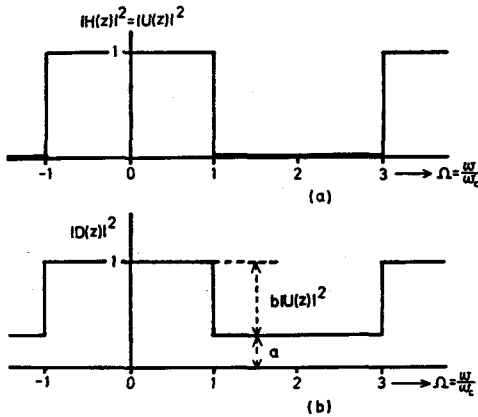


図1 (a)理想低域フィルタの絶対値自乗特性（基本関数）  
(b)分母の形状  
Fig. 1. (a)Magnitude-squared characteristic of ideal low-pass filter (Fundamental function)  
(b)Form of denominator

図1(a)の  $|H(z)|^2$  を式(2)で近似すると、この関数が偶関数であることから、係数は  $a_n$  のみで、しかも、偶数番目の係数が零となり、 $N$  を相当に高次まで取り上げないと Pass Band でのリップルが大きくなる。そこで、打ち切り数が小さく、近似を良くするために、分母多項式を考える。

本近似法では、まず図1(a)の絶対値自乗特性を基本関数  $|U_1(z)|^2$  として、分母の絶対値自乗の形状を図1(b)のように表わし、 $|H(z)|^2$  の近似誤差の低減を行なうものである。

すなわち、図1(a)を分子、同図(b)を分母として、

$$|H(z)|^2 = \left| \frac{N(z)}{D(z)} \right|^2 = \frac{|U(z)|^2}{a+b|U(z)|^2} \dots\dots\dots(3)$$

但し、 $a+b=1$   $\dots\dots\dots(4)$

なる絶対値自乗を考えることにより、Pass band での

波状が分子、分母で相殺して打ち切り数を小さくすることができる。

### 3. デジタルフィルタの伝達関数

式(2)を基本関数として、式(3)の伝達関数の絶対値自乗が構成される。本近似法では、任意の  $|H(z)|^2$  を目標としたとき基本関数  $|U(z)|^2$  の選択により、近似誤差に大きく影響を与える。

すなわち、基本関数  $|U(z)|^2$  をフーリエ級数展開したときの係数  $a_n$  の収束が速い程、打ち切り数  $N$  が小さくても  $|U(z)|^2$  の近似が良くなる。図1(a)による基本関数  $|U_1(z)|^2$  の  $a_n$  の収束性を図2に示すが、図3に表わす形状を基本関数  $|U_2(z)|^2$  として用いると図2から、かなり良い収束結果となる。

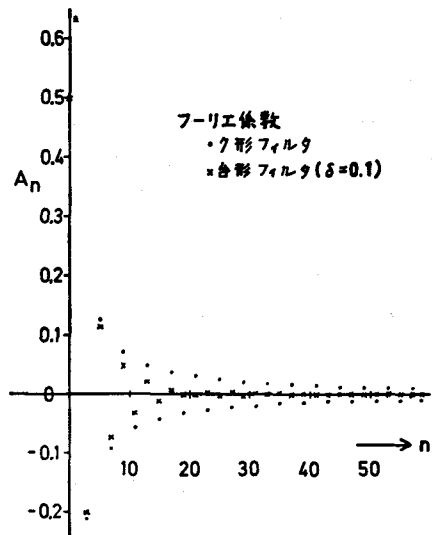


図2 フーリエ係数の収束  
Fig. 2. Convergence of coefficient

そこで、 $a_n$  の収束を速めるために、図3のごとく僅かな傾斜をもたせた基本関数  $|U_2(z)|^2$  が考えられる。先に示した矩形型の基本関数  $|U_1(z)|^2$  と傾斜をもたせた基本関数  $|U_2(z)|^2$  における  $a_n$  の収束の比較を図2に掲げているが、その結果、 $|U_2(z)|^2$  の方が相当に速い収束が得られることになった。さらに、図3の台形型基本関数の edge の部分に丸みをつけると、フーリエ係数の収束性は一層改善されるようである。

図3の台形型基本関数  $|U_2(z)|^2$  を用いた場合、シャ断周波数での条件 ( $\Omega = \omega/\omega_c = 1$  で  $|H(z)|^2 = 1/2$ )

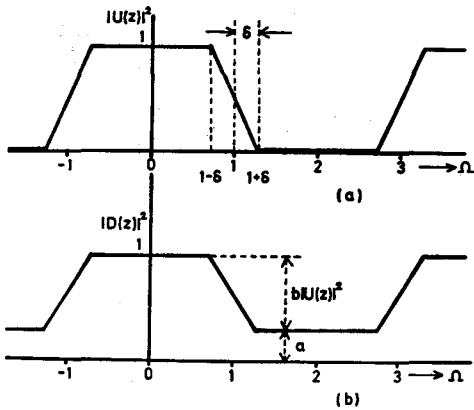


図3 (a)台形状の基本関数(分子)  
(b)分母

Fig. 3. (a)fundamental function of trapezoid form (Numerator)  
(b)Denominator

を考慮すると、

$$4a + b = 2 \quad \dots\dots(5)$$

よって、式(4)、(5)から、 $a, b$  を求めると、 $a = 1/3, b = 2/3$  となり、台形状の場合、 $a, b$  が固定されるが  $\delta$  がパラメータとなる。

したがって、最終的に絶対値自乗は式(3)より

$$|H(z)|^2 = \frac{3|U_2(z)|^2}{1+2|U_2(z)|^2} \quad \dots\dots(6)$$

となる。ここで、 $|U_2(z)|^2$  は図3を次数  $N$  までフーリエ級数展開したものである。

上式で、振巾特性における Pass band での最大減衰量  $D_p$  及び、Attenuation band での最小減衰量  $D_s$  を求めると次式ようになる。

$$D_p = 10 \log \frac{1 + \Delta_{NP}}{a + b(1 + \Delta_{NP})} \quad \dots\dots(7)$$

但し、 $\Delta_{NP}$  : Pass band における  $|U_2(z)|^2$  の最大リップル値 (打切り数  $N$ )

$$D_s = 10 \log \frac{\Delta_{NS}}{a + b\Delta_{NS}} \quad \dots\dots(8)$$

但し、 $\Delta_{NS}$  : Attenuation band における  $|U_2(z)|^2$  の最大リップル値 (打切り数  $N$ )

$\Delta_{NS}, \Delta_{NP}$  は図3に示す  $|U_2(z)|^2$  の傾斜  $\delta$  によっても変化する。

さて、このようにして得られた伝達関数の絶対値自乗  $|H(z)|^2$  から伝達関数  $H(z) = N(z)/D(z)$  を求めるには、分母多項式  $|D(z)|^2 = 0$  より、単位円内に位置する安定根を求める必要がある。

そして、求めたすべての安定根を用いて、 $D(z)$  がで

きる。同様に、 $N(z)$  を求めればよい。

#### 4. 結 果

以上述べた近似方法による伝達関数を検討する。例として、 $n=7$  の L.P.F. を取り上げたところ、この伝達関数の零点、極の配置は図4のごとくになった。また、この伝達関数の振巾特性と位相特性をそれぞれ図5、図6に示す。

図5の振巾特性には、基本関数  $|U(z)|^2$  が矩形型の場合(点線)についても示してある。これに比較して、基本関数に傾斜をもたせた場合の方が少し良い結果となっており、それほど効果が現われていない。その理由は、先のフーリエ級数展開の係数  $a_n$  の収束の様子を示している図2から、 $n=7$  で打切った場合は、どちらの基本関数  $|U(z)|^2$  においても  $a_n$  の各値にあ

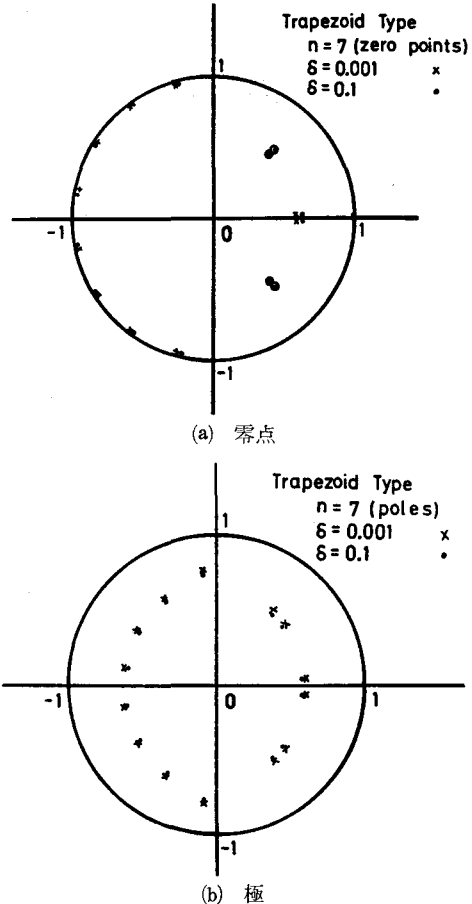
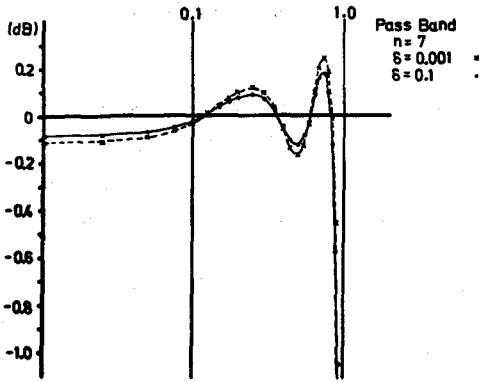
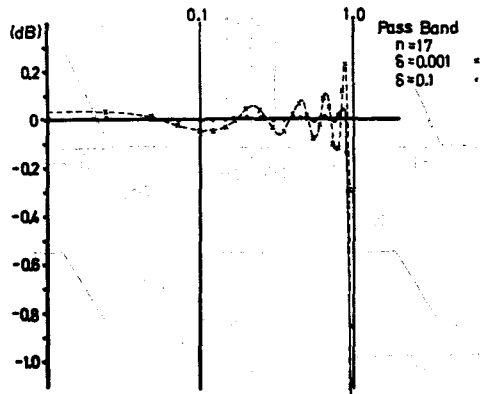


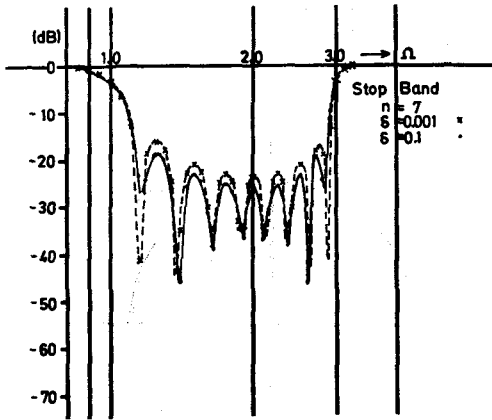
図4 零点と極の位置 ( $n=7$ )  
Fig. 4. Location of zeros and poles ( $n=7$ )



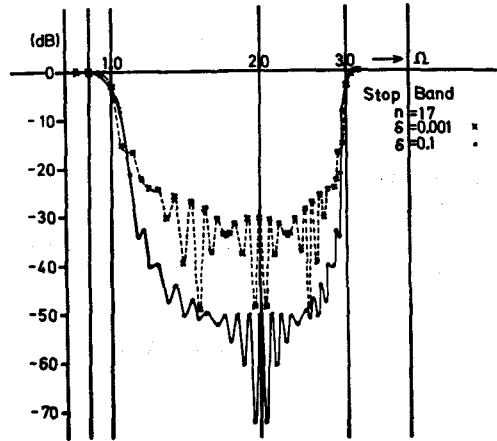
(a) Pass band



(a) Pass band



(b) Stop band



(b) Stop band

図5 振巾特性 ( $n=7$ )

Fig. 5. Magnitude characteristic ( $n=7$ )

図7 振巾特性 ( $n=17$ )

Fig. 7. Magnitude characteristic ( $n=17$ )

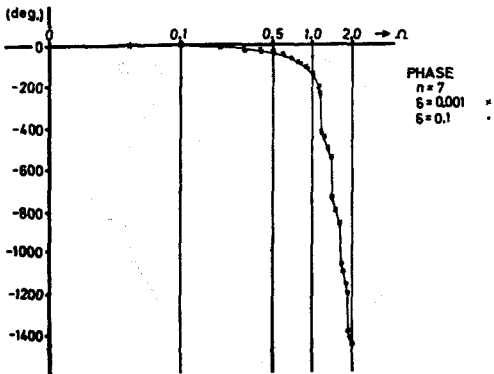


図6 位相特性 ( $n=7$ )

Fig. 6. Phase characteristic

まり差がないことによる。

そこで、 $n=17$  付近では台形状の基本関数の方は収束がほぼ完了しているので、 $n=17$  の場合について、基本関数の傾斜  $1/2\delta$  を変えたときの振巾特性を求めてみると図7のようになった。その結果、 $\delta=0.1$  の場合、矩形に近い  $\delta=0.001$  と比較して相当に L. P. F. としての振巾特性が改善されることが分かる。すなわち、dB 値で、Pass band での最大減衰量  $D_p$  は約  $1/10$ 、Attenuation band での最小減衰量  $D_s$  が約 2 倍と良い結果が得られる。

次に、台形状の基本関数を用いてフィルタ設計した時の  $D_p - D_s$  の関係を図8に示す。図8の結果からも、矩形型の基本関数に近い  $\delta=0.001$  に比較して、 $D_s$  が小さく、 $D_p$  が大きい L. P. F. の良い振巾特性

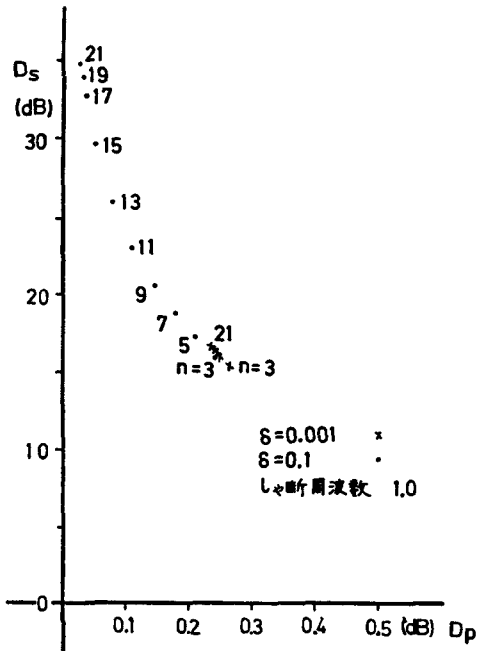


図8  $D_P - D_S$  特性  
Fig. 8.  $D_P - D_S$  characteristic

が得られることが分かる。また、 $\delta=0.1$  の場合、係数打ち切り数  $n$  が収束のほぼ完了する数に近づく程、良い結果となる。

## 5. あとがき

伝達関数の絶対値自乗特性の近似において、収束性の良い絶対値自乗の基本関数を導入することにより、誤差を小さくした直接近似の方法について述べた。本近似法の特徴を次にあげる。

- (1) 伝達関数の絶対値自乗をそのままフーリエ級数展開し、近似するのではなく、近似誤差を小さくするために、絶対値自乗に分子、分母を設け、それぞれに同じ基本関数なるものを導入して、フーリエ級数展開したところに特色がある。
- (2) さらに、基本関数をフーリエ級数に展開したときの収束の速い基本関数を考慮し、近似誤差を低減し

ている。

- (3) 既存の方法によると、元関数を微分し、その特性のフーリエ級数展開を行ない、さらに、マクローリン展開を用いる手法で行なわれる為、近似誤差が複雑な形で現われ、それ程容易ではない。しかし、本方法は簡単に、かなり特性の良い絶対値自乗特性が近似できる。

今後の問題点としては、伝達関数における絶対値自乗関数の分子、分母の次数が違った場合の近似の検討、さらに、近似を良くするための収束性を考慮した基本関数の導出、等がある。

さらに今後、それらの点について、研究を続けて行くつもりである。

## 謝 辞

日頃より、御指導頂く本学電子工学科大脇健一教授に感謝の意を表わすとともに、平素より御指導、御助言頂く中村正孝助教授に深謝する。また、御協力頂いた卒研生日野伸二君に感謝する。

## 6. 参 考 文 献

- 1) H. E. Kallman: "Transversal filters", Proc. IRE., 28, p. 302, (July 1940).
- 2) A. T. Johnson: "Magnitude equalization using digital filters". IEEE Trans., CT-20, p. 308 (May 1973).
- 3) G. C. Maenhout and W. Steenaert: "A direct approximation technique for digital filters and equalizers" IEEE Trans., CT-20, p. 548 (Sept. 1973).
- 4) 杉本, 西原: "デジタルフィルタの特性近似について", 信学会回路とシステム研資, CST 74-42 (1974-08).
- 5) 今井, 北村, 竹谷: "デジタルフィルタの対数伝達特性の直接近似" 信学論(A), 59-A, 2, p. 157 (昭51-02).
- 6) 重広, 中村: "デジタルフィルタの一近似法". 昭51信学全大. 47.