

単一極能動フィルタにおける近似度について

重広 孝則・中村 正孝
住居 久敬・竹内 明文

On Approximating Degree of Active Filter with a Single Attenuation Pole

By Takao SHIGEHIRO, Masataka NAKAMURA,
Hisao SUMII, Akihumi TAKEUCHI

Abstract

We considered the error of the approximation problem, which was developed at active filter of any degree having only a pair of zeros on the imaginary axis.

At this filter as above, weight function concerned with zeros are introduced into the characteristic function of non-pole butterworth, and consequently this have become one of approximating method to give an effective result.

This paper describes the approximating degree evaluated through all the frequency range, and the comparison with butterworth.

あ ら ま し

虚軸上に一對の零点を持つ任意次数の低域フィルタの近似問題において、その近似度について考察した。この低域フィルタでの特性関数は、その零点に関連させた重み関数を、無極 Butterworth 形に導入したものであり、かなり効果的な結果を得ることのできる一近似法である。この場合、周波数全域にわたって近似度の評価方法を取り、Butterworth 形との比較検討をした。

1. ま え が き

理想フィルタに極めてよく近似された特性を持つような有理伝達関数形を求める近似問題では、その近似度がまた重要である。

すでに虚軸上の一對の零点による単一減衰極低域能動フィルタの近似問題について報告を重ねているが、本稿はこの近似方法における近似度の検討結果を報告

するものである。

近似度は周波数領域か、あるいは時間領域で検討されるが、近似問題そのものが普通、周波数領域での伝達関数の絶対値自重より出発し、特性関数に注目するから、本稿でも、特性関数に注目した近似度の評価方法を行なった。

近似度はしゃ断周波数近傍の特性の曲りではほぼ決定される。そこで近似度の点については通過域での波うちの数を増加させるべきであることを結論として述べている。

2. 近似度の評価方法

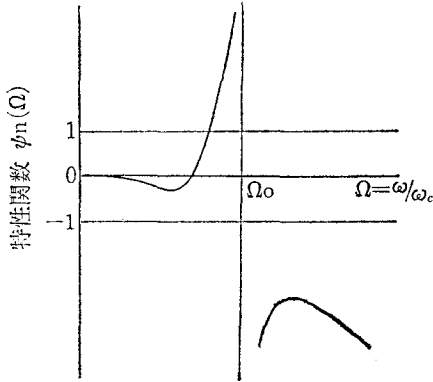
本近似法による特性関数 $\phi_n(\Omega)$ は、無極 Butterworth 形の特性関数の 2 次分を伝送零点に関連した重み関数に置きかえている。

$$\phi_n(\Omega) = W(\Omega) \cdot \Omega^{n-2} \quad (1)$$

$$W(\Omega) = \frac{(2\Omega_0^2 - 1)\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \quad (2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} w_o: \text{シャ断角周波数} & \quad \Omega = w/w_c \\ w_o: \text{減衰極角周波数} & \quad \Omega_0 = w_o/w_c \\ n: \text{フィルタの次数} & \end{aligned}$$



第1図 特性関数 $\psi_n(\Omega)$

理想低域フィルタとしては、

$$\begin{cases} \text{通過域 } (1 > \Omega > 0) \text{ では } \psi_n(\Omega) = 0 \\ \text{阻止域 } (\Omega > 1) \text{ では } \psi_n(\Omega) = \pm \infty \end{cases} \quad (3)$$

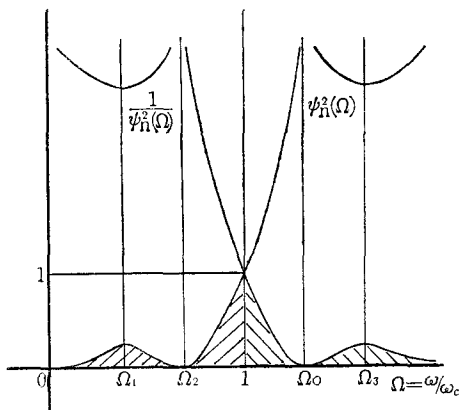
が要求されることは当然であるが、この理想特性を有する伝達関数は、実在の系では絶対不可能であることはよく知られている。

さて、(1)式の現実と(3)式の理想のずれを周波数全域にわたって次のような自重誤差 E_n^2 で評価する。

$$E_n^2 = \int_0^1 \psi_n^2(\Omega) d\Omega + \int_1^\infty \frac{1}{\psi_n^2(\Omega)} d\Omega \quad (4)$$

すなわち、この評価方法の特徴は第2図のように、阻止域で特性関数の逆数を用いたことにある。

3. 自重誤差 E_n^2 の算出



第2図

前述のように自重誤差 E_n^2 は

$$\begin{aligned} E_n^2 &= E_{n1}^2 + E_{n2}^2 \\ E_{n1}^2: \text{通過域での自重誤差} \\ E_{n2}^2: \text{阻止域での自重誤差} \end{aligned} \quad (5)$$

E_{n1}^2, E_{n2}^2 それぞれの積分を(1)式の本近似法の特性格数形において計算すると、

まず、通過域では

$$\begin{aligned} E_{n1}^2 &= \int_0^1 \psi_n^2(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{1}{2n-3} \left\{ \left\{ 1 + \frac{8\Omega_0^2}{(2n-1)(\Omega_0^2-1)} + \frac{8\Omega_0^2(\Omega_0^2-1)}{2\Omega_0^2-1} - \frac{2n-5}{2n-1} \right\} I_{2n} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_0^1 \frac{\Omega^{2n}}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^3} d\Omega \\ &= \frac{1}{(1-\Omega_0^2)^2(2n-5)} + \frac{(2n-1)\Omega_0^2}{2n-5} I_{2n-2} \end{aligned}$$

一方、阻止域では

$$\begin{aligned} E_{n2}^2 &= \int_1^\infty \frac{1}{\psi_n^2(\Omega)} d\Omega \\ &= \frac{1}{2n-5} \left\{ \left\{ 1 + \frac{8\Omega_0^2}{(2n-3)(2\Omega_0^2-1)(\Omega_0^2-1)} + \frac{(2n-7)}{(2n-3)(2\Omega_0^2-1)} - 1 \right\} \cdot 8 \cdot \Omega_0^4 (\Omega_0^2-1) I_{2(n-1)} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} I_{2(n-1)} &= \frac{-1}{(2n-7)\Omega_0^2(\Omega_0^2-1)^2} + \frac{(2n-3)(2\Omega_0^2-1)I_{2(n-2)}}{(2n-7)\Omega_0^2} \end{aligned}$$

以上のような漸化式で自重誤差が与えられているがさらに、本近似法での通過域で極めてわずかな波うち（通過域最大減衰量 A_p ）及び阻止域での減衰量のよりり（阻止域最小減衰量 A_s ）なる波状一波状特性が近似度にどれほどの影響があるか調べるため、次の量も併せて導出している。

すなわち、第2図での $\Omega_2 > \Omega > 0, \infty > \Omega > \Omega_0$ までの自重誤差であり、それぞれを E'_{n1}^2, E'_{n2}^2 とする。

自重誤差 E'_{n2}^2 の算出

$$\begin{aligned} E'_{n1}^2 &= \int_0^{\Omega_2} \psi_n(\Omega) d\Omega \quad (\Omega_2 > \Omega > 0) \\ &= \frac{8\Omega_0^2(\Omega_0^2-1)}{(2n-3)} \left\{ (2\Omega_0^2-1) - \frac{2n-5}{2n-1} \right\} \\ I_{2n} &+ \frac{8\Omega_0^2(\Omega_0^2-1)\Omega_2^{2n-1}}{(2n-1)(2n-3)(\Omega_2^2-\Omega_0^2)^2} \end{aligned}$$

ただし,

$$\Omega_2 = \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\Omega_0^2 - 1}}$$

$$I_{2n} = \int_0^{\Omega_2} \frac{\Omega_{2n}}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^3} d\Omega$$

$$= \frac{\Omega_2^{2n-1}}{(2n-5)(\Omega_2^2 - \Omega_0^2)^2} + \frac{(2n-1)\Omega_0^2}{(2n-5)} I_{2n-2}$$

一方, 阻止域では

$$E'_{n2^2} = \int_{\Omega_0}^{\infty} \frac{1}{\psi_n^2(\Omega)} d\Omega$$

$$= \frac{2}{(2n-3)(2n-5)\Omega_0^{2n-6}(2\Omega_0^2-1)(\Omega_0^2-1)}$$

$$+ \left\{ \frac{(2n-7)}{(2n-3)(2\Omega_0^2-1)} - 1 \right\}$$

$$\frac{8\Omega_0^4(\Omega_0^2-1)}{(2n-5)} I_{2n-2}$$

ただし,

$$I_{2(n-1)} = \int_0^{\frac{1}{\Omega_0}} \frac{X^{2(n-1)}}{\{(2\Omega_0^2-1) - \Omega_0^2 X^2\}^3} dX$$

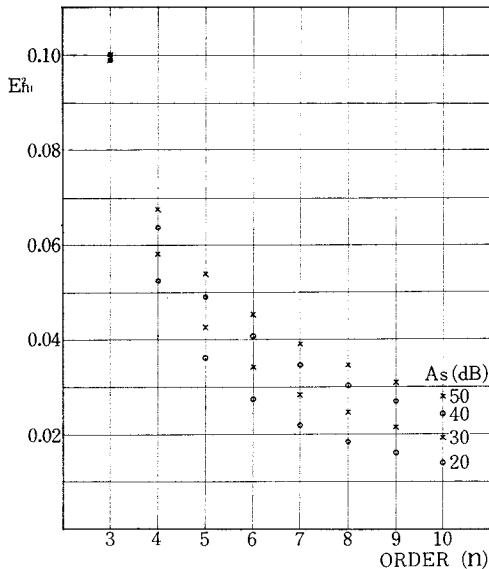
(ただし, $X = \frac{1}{\Omega}$)

$$= \frac{-1}{4(2n-7) \cdot \Omega_0^{2n-1} (\Omega_0^2-1)^2}$$

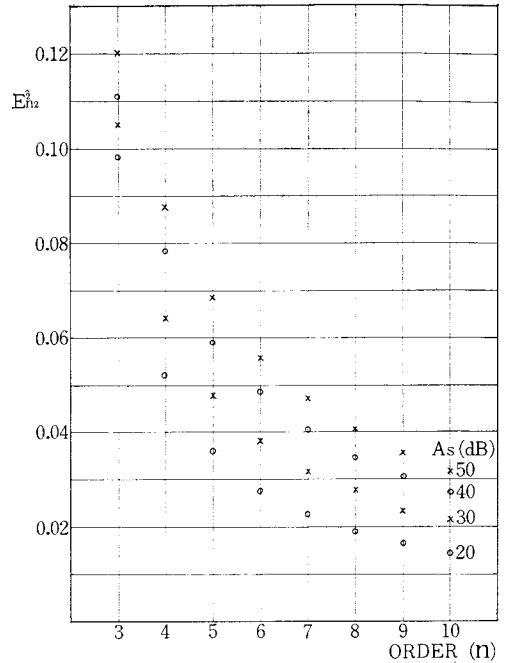
$$+ \frac{(2n-3)(2\Omega_0^2-1)}{(2n-7) \cdot \Omega_0^2} I_{2(n-1)}$$

次数 n , 減衰極 Ω_0 は, 希望するフィルタ特性 (しゃ断の傾斜, 阻止域最小減衰量 A_s) より求まる。そこで, 各特性に対する自重誤差を前記の諸式を用いて数値計算した。

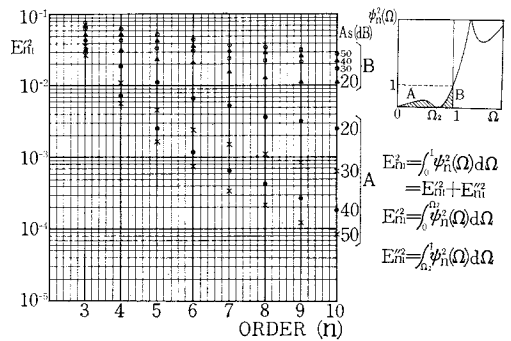
この結果を第3図~第6図に示す。



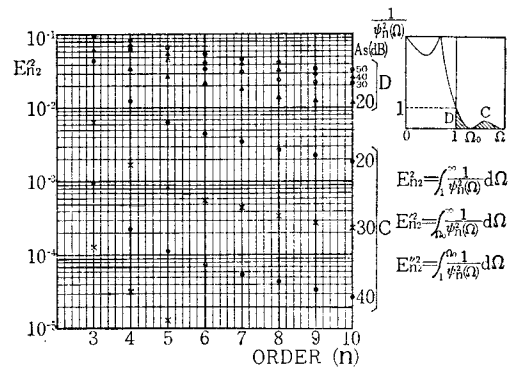
第3図 自重誤差 E_{n1}^2



第4図 自重誤差 E_{n2}^2



第5図 自重誤差 E_{n1}^2

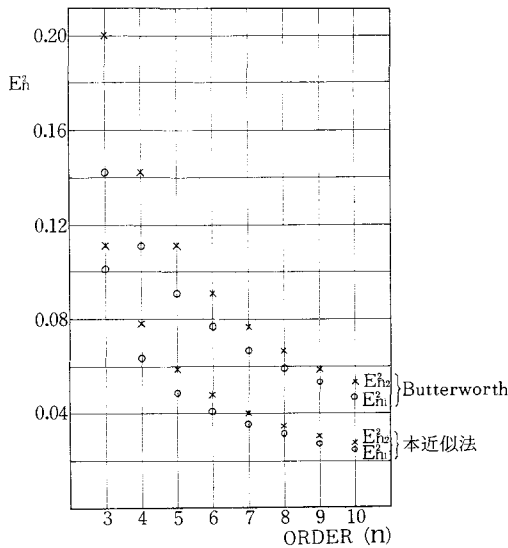


第6図 自重誤差 E_{n2}^2

4. 検 討

初期の目的は、本近似法によるフィルタ設計において、最適の阻止域最小減衰量を決定する理論的根拠をこの近似度の評価に期待したことである。

しかしながら、第3図～第6図の結果を見てもわかるように阻止域最小減衰量が小さいほど近似度がよいこととなり、これで3 dB down シャ断周波数を定めるかぎり、第5図、第6図のように E'_{n1^2} , E'_{n2^2} の



第7図 Butterworth 形との比較

全体に占める割合が極めて小さくなるためである。

以上、整理すると、

- (1) この場合、近似度はシャ断周波数近傍における特性の曲りでほぼ決定される。
- (2) 最適の阻止域最小減衰量を決定するためには、シャ断周波数付近の近似度のはるかによい近似問題を考えなければならない。すなわち、通過域での波うちの数を増加させる必要がある。
- (3) 本近似法のように減衰極を一つ設けることにより Butterworth 形に比較し、おおよそ2倍近く近似度が改善されている。(第7図)

5. 参 考 文 献

- 1) 中村, 沖根, 重広; “有極能動RC低域フィルタ” — 虚軸上の一対のみの零点による遮断特性の改善 — 電子通信学会, 回路システム理論研究, 10月(1971).
- 2) 中村, 重広, 沖根; “能動低域フィルタに関する研究(その2) — 零点を虚軸上に一対しか持たない場合のシャ断特性 — 広工大紀要 第6巻1号.
- 3) L. Weinberg; “Network analysis and synthesis” P 491, McGraw-Hill, (1962).
- 4) D. S. Humpherys; “The analysis, design and synthesis of electrical filter”, P 376, Prentice-Hall(1970).