広島工業大学紀要教育編
第 4 巻（2005）pp. 53-57
論　　　文

ローレンツ力による起電力の考え方

井　上　　光*

（平成16年 9 月10日受理）

Consideration on the electromotive force generated by Lorentz force

Hikaru INOUE

(Received Sep. 10, 2004)

Abstract

A simple model is proposed to illustrate the electric field generated by Lorentz force in a conductor rod moving in a uniform magnetic field. The model is useful for students to understand one of the basic character of electromotive force related to electromagnetic induction.

Key Words: Lorentz Force, Electromotive Force, Induction, Flux rule

1. は じ め に

電磁誘導による起電力は「電圧＝導線ループ内の磁束の時間変化率」の形の式で計算される。これを短く「磁束規則」[1] と呼ぼう。この計算法は発電機にも変圧器にも適用できるので，普通はその起源（出発点とする基本法則）にさかのぼることなく使われる。起源には，ファラデーの電磁誘導の法則と磁場によるローレンツ力のふたつがある。前者はマクスウエル方程式のひとつであり，導線が止まって磁場が変化する場合に適用される。後者は運動する電荷と電場および磁場の関係を定義する式であり，磁場が変化せず導線が動く場合に使われる。両者は独立な基本法則である。誘導現象の共通点は磁場を介して起電力をとりだそうとする点である。どちらの場合でも，導線に沿う力の成分の線積分が起電力と解釈され，磁束規則が導かれる。しかしながら，結果の表現方法が同じになるために，ローレンツ力による起電力について，いくつかの教科書や演習書[2] で磁束規則の導出過程に誤った記述，または適切とは思えない記述，がなされている。無論，正確な見方を教えてくれる教科書[3] もある。しかし，新しく出版された教科書等[4] で，なおも同種の誤りや不適切さがみられる。誤り自体は電磁気学の演習問題の形で指摘し，訂正できる。このテーマは誘導起電力の「電圧とは何か」を問い直すことでもある。さらに，相対論の視点で点検しておくこともできる。以下は，この種の問題の説明に説得力があると思える導体モデルの提案である。

2. 問題のありか

磁束密度 $\boldsymbol{B}$[T] の磁場中を電荷 q [C] の粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ [m/s] で運動しているとき，この粒子が受けるローレンツ力 $\boldsymbol{F}$[N] は

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1}$$

と表される。この力は真空中の 1 個の荷電粒子に対しても，物質中の荷電粒子の集群に対しても区別なく適用できる。

磁束密度 $\boldsymbol{B}$[T] の一様な磁場中を導体の棒が速度 $\boldsymbol{v}$ [m/s] で運動しているとき，棒を造り上げているすべての荷電粒子が式（1）の力を受ける。そのうち自由電子だけがこの力で棒内の一方から他方へ寄せられて密度差をつくり，棒の両端に「電圧」が現れることになる。

ところで，多くの電磁気学の教科書で，このことが

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{2}$$

の電場 $\boldsymbol{E}$ [V/m] による効果，またはこの $\boldsymbol{E}$ に相当する効果，として説明されている。さらに，この $\boldsymbol{E}$ に誘導電場や誘起電場等の名がつけられている。つまり，式（2）

* 広島工業大学工学部建設工学科

の電場 $\boldsymbol{E}$ ができて電荷を動かす力となるので，$\boldsymbol{E}$ を導線に沿って線積分すれば電圧が計算できるとの考え方である。結果は磁束規則の形になる。

結論を先に言えば，式（2）の電場 $\boldsymbol{E}$ は存在しない。電圧の計算のためには，電場を介在させる必要はなく，実在の力 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$［N/C］を積分するだけでよい。計算の実質はそうなっているので，電場の状態に関係なく，磁束規則が正しく得られている。

力 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ で駆動された電子は，移動の結果として，新しい電場をつくる。この電場は式（2）の $\boldsymbol{E}$ とは平均的な方向が逆である。つまり，移動の原因とみなされた（仮想的な）電場と，移動の結果としてできる現実の電場は全く異なる。このあたりから，教科書による説明に違いもでている。例は挙げないが，式（2）のタイプの電場をめぐる話の運びにさまざまな違いがあり，学ぶ者を混乱させる状況にある。式（2）の $\boldsymbol{E}$ を否定すれば，話は単純になる。場の有無は電磁気現象の根幹に関わる事柄である。もともと無いものは，「相当する」ものであっても，導入しない方がよい。このようすを演習問題の形で例示する。

3．演 習 問 題

事柄の要点は次の演習問題で明らかになる。

問題：

半径 R［m］の薄い2枚の導体の円板を，図1のように，間隔 L［m］で平行に向かい合わせ，両方の板の中心間を導体の棒 OP でつなぐとする。この棒の部分を磁束密度 $\boldsymbol{B}$［T］の一様な磁場に対して垂直に保ち，かつ，棒にも磁場にも垂直な方向へ一定の速度 $\boldsymbol{v}$［m/s］で移動させるとする。$L \ll R$ として，次の各問に答えよ。

① 平衡状態で，導体板の間にどのような電場ができるか。

② 導体板間の電圧および板に蓄えられる電気量を求めよ。

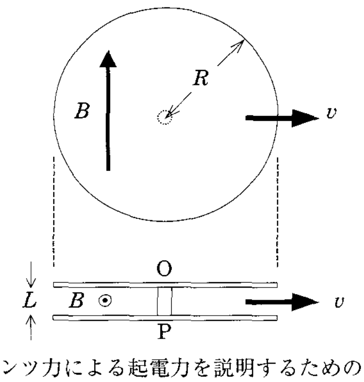

図1　ローレンツ力による起電力を説明するためのモデル
平行に向かい合わせた2枚の導体円板の中心間を導体棒でつないだものを磁場にも棒にも垂直な方向に運動させる。

解答：

① 電子の電荷を $-e$［C］とする。図の棒 OP の中の電子には $-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$［N］のローレンツ力がはたらく。力の向きは P から O への方向となる。結果として，自由電子は P 側の銅板から汲み出されて O 側の銅板に移動し，平衡状態になる。つまり，棒の発電効果で平行平板コンデンサーが充電されている状況になる。P 側の板が正で O 側の板が負であり，板間には P 側から O 側に向かう電場ができている。平衡状態では，この電場は

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3}$$

であり，式（2）の場合と符号が逆である。式（3）の電場 $\boldsymbol{E}$ は板間の空間から棒の内部まで等しく連続的に存在している。棒内では $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0$ となったところで自由電子の（平均的な）動きが止まり，平衡状態になっている。このことは円板がなくて棒だけの場合でも成り立つ。誘起電場の名は実際に発生する式（3）のような電場に与えられる方が名称としてふさわしい。板間の等電位面は板に平行であり，棒の内外で連続である。板の端では端面効果が現れ，電場と等電位面の形は式（3）によるものとは異なるが，それらは平行平板コンデンサーについてよく知られているものである。

② 板間の電圧 ϕ［V］は

$$\phi = LvB \text{ [V]} \tag{4}$$

であり，棒が1秒間に掃く面積 Lv［m^2/s］に B［T］をかけた形になっている。単位間の関係式［T・m^2］=［Wb］より，ϕ の単位は［Wb/s］であり，式（4）は磁束規則そのものである。

2枚の銅板の静電容量 C［F］は，板の面積 $S=\pi R^2$［m^2］を使って，$C=\varepsilon_0 S/L$ で与えられるので，蓄えられる電荷 Q［C］は

$$Q = C\phi = \varepsilon_0 SvB \text{ [C]} \tag{5}$$

となる。ここで，ε_0［F/m］は真空の誘電率である。あるいは，大きさ $E=vB$ の板間電場の導体終端には密度が $\varepsilon_0 E$［C/m^2］の電荷がある（ガウスの法則）ことより，$\varepsilon_0 SvB$ の形が直接に算出できる。Q は，$L \ll R$ の近似の結果であるが，棒の長さ L によらない。

4．課 題 の 発 展

図1の導体系は直流発電機を内蔵した平行平板コンデンサーとみなせる。この「発電する部分」は，図2のようにイメージを変えながら，外部に取り出せる。板はそのままで，棒が連続的に移動変形して(b)，(c)のようになる過程を想像すればよい。

磁場 $\boldsymbol{B}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ の状況が同じならば，(b)の導線の各直

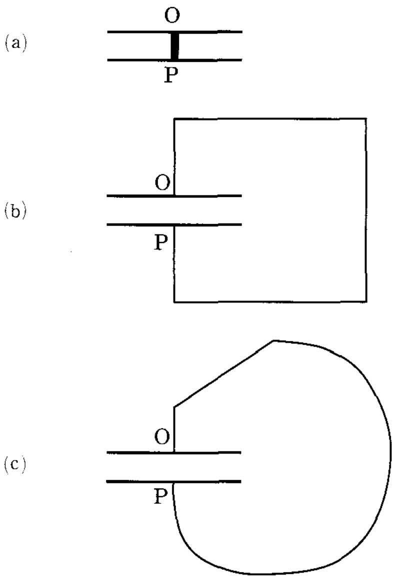

図２　発電する導線部分の変形。
(a)　図１の導体系
(b)　導体板の外側に導線ループをつくる。
(c)　導線ループを任意の形にする。

線部分による起電力の差し引き（代数和）の結果は(a)の棒 OP の長さ L [m] の部分がつくる起電力に等しい。したがって，(a)と(b)の起電力は同じである。同じことは導線を(c)のように任意の形に変えても成り立つ。導線の微小線分のうち速度ベクトルと磁場の両方に垂直な成分だけがそこでの微小電圧の発生に有効となる。この微小電圧を O から P へ向かって積分すれば，OP 間の端子電圧が得られる。これは(c)型ループから(b)型の要素だけを取り出すことである。結局，板間の電場はどの場合も同じである。

次に，コンデンサーの板を取り去り，導線だけが磁場中を運動する場合を考える。このときも，板の半径を連続的に R から 0 へと変化させて，系全体にわたって電場 $\boldsymbol{E}$ とその等電位面がどう変化するかを連続的に追跡想像すればよい。途中で不連続なジャンプは起こらない。それらは導体系の形に従って変化する。たとえば，(a)の場合，平衡状態では，棒（円柱）の表面の連続的な電荷密度勾配による電場が導体の内外に出来る。棒の中では式（３）の電場となり，棒の外では円柱表面に分布した電荷がつくる双極型の電場となる。場の解析解を得るのは難しいが，定性的には簡単なタイプである。(b)，(c)の場合にその電場や等電位面の形を問うことは，発電機の巻き線周辺にできる電位分布などの原型をたどることになり，かなり込み入ってくる。求めたいものは，発電機能を持つ導線に沿っての $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の線積分の値，つまり OP 間の端子電圧の値であり，板の有無には関係しない。並進運動では，図２のどの場合でも同じである。

実際問題では，回転運動が重要であろう。電流も流れ始める。誘導モーターの中で起こることなども含めて，現象は様相を変えて多種多様に分岐する。どの場合でも，運動導体の各部分について $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ がしっかり定義されていれば，端子電圧は算出できる。この計算が複雑なので，実際上は磁束規則の方が使い易い。

ここでは原型となる単純な場合に的をしぼる。

５．相対論での見方

以上の議論では，まず磁場 $\boldsymbol{B}$ があって，その中を導体が速度 $\boldsymbol{v}$ で動くとしている。この場合，暗黙のうちに磁場 $\boldsymbol{B}$ をつくる装置に固定された座標系が想定されている。この座標系で速度 $\boldsymbol{v}$ は明確に定義されているので，結果もその系での出来事と解釈すればよい。しかしながら，もしも別の座標系でこの現象を表わすならば，…という原理的な課題にも答えておく必要がある。とくに明らかにしておきたいのは，導体に固定されている座標系の場合である。この座標系では，速度 $\boldsymbol{v}$ がゼロとなるので，ローレンツ力は消える。しかし，座標系が何であろうと，導体板に式（５）の電荷 Q [C] が蓄えられている事実には変わりはない。この場合の「起電力」とは何だろうか。そこで，先の演習問題に次の設問③をつけ加える。

問題

③　導体と一緒に動く座標系では，この現象はどう記述されるか。

解答：

現象は相対論で解釈される。上に述べた始めの座標系を S 系，導体に固定した座標系を S' 系と呼ぶ。S' 系は，時刻 $t=0$ には S 系と一致し，その前後では S 系の x 軸方向に速さ v で移動していると考える。S 系では z 軸の方向に強さ B_0 の一様な磁場があり，（導体板間以外の空間では）電場はないとする。

$$S\text{ 系では，}\boldsymbol{B}=(0,0,B_0),\ \boldsymbol{E}=(0,0,0) \tag{6}$$

相対論によれば，このとき S' 系には次の形の磁場 $\boldsymbol{B}'$ と電場 $\boldsymbol{E}'$ が存在する。

$$S'\text{ 系には，}\boldsymbol{B}'=(0,0,\gamma B_0),\ \boldsymbol{E}'=(0,-v\gamma B_0,0) \tag{7}$$

式中の係数 γ は次式で定義される。

$$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2} \tag{8}$$

ここで，c は光速である。γ は１より大きいが，$v \ll c$ ならば１に近い。変換の理由付けとその一般形を付録に記す。

式（７）は，S' 系では磁場 $\boldsymbol{B}'$ が S 系の磁場 $\boldsymbol{B}$ の γ 倍となること，さらにこの磁場 $\boldsymbol{B}'$ と直交して，一様な電場 $\boldsymbol{E}'$ が存在することを示している。$\boldsymbol{B}'$ と $\boldsymbol{E}'$ は座標系の変換によって現れるものであり，導体の有無に関係しない。

導体にとっては，$\boldsymbol{E}'$ は「外部」静電場である。

S' 系ではこの一様電場 $\boldsymbol{E}'$ の中に問題の導体系が静止していることになる。一般に，静電場の中に置かれた導体では，表面が等電位になるように電荷の移動が起こる。電位の等しい導体板間には電場は存在しない。S 系でも S' 系でも，電子が板間を移動し，偏在していることには変わりはない。S 系では力 $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ による移動の結果として，板間にのみ電場ができる。一方，S' 系では，$\boldsymbol{F}' = -e\boldsymbol{E}'$ による移動の結果として，板間の電場が消える。偏在電荷によって板間に $-\boldsymbol{E}'$ の電場ができ，外場を打ち消している。別の言い方をすれば，外場 $\boldsymbol{E}'$ が導体板によって遮蔽されていることになる。

式（6），（7）を見て，$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}', \boldsymbol{E}'$ の関係をベクトル積で表すと次の形になる。

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}' \tag{9}$$

$$\boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{10}$$

これらは式（2）に似ているが，現象の解釈は上に述べた通りで，式（2）とは異なる。式（9）は S' 系の場どうしの関係式である。式（10）は S 系の場から S' 系の場への変換式である。

式（10）の係数 γ は次のように解釈できる。S' 系での板間の電場の強さは S 系での板間の電場の強さの γ 倍となっている。どちらの場合でも，2枚の導体板に偏在している電荷の総量 Q [C] は変わらない。電荷は代表的なスカラー量であり，座標系にはよらない。S 系からみて，S' 系は速さ v で運動している。このような場合，相対論では運動物体にローレンツ収縮がおこり，板の面積が $1/\gamma$ 倍になっている。そうすると電荷密度が γ 倍になるので，板間の電場の強さ（ここでは，外場 $\boldsymbol{E}'$ を打ち消す場）も γ 倍となる。

6．高校物理では

現行の高校物理の教科書（2005年までの物理Ⅱ）では，「ローレンツ力」，「電磁誘導の法則」，「磁界中を動く導線」の順に説明されている。指導要領[5] があるので，この構成に例外はほとんどない。電磁誘導の法則では，まず，ファラデーの法則による磁束規則が説明されている。次に，導線が動く場合の誘導起電力がやはり磁束規則で説明されている。磁束が変化する閉じた回路の例として，平行な導体レールの上を走る導体棒のモデルがよく使われている。このループモデルについてファラデーの法則を拡張した後に，この棒の起電力は「ローレンツ力でも説明できる」としているものが多い。結果的な「誘起電場」とローレンツ力のつり合いのようすも大多数の教科書で適切に説明されている。少数のものが式（2）のタイプの電場を提示している。誘導起電力の2種の起源を意図的に強調するものはなく，磁束規則の立場で同一視させている。この段階では，その方が分り易く，実際問題の扱いに適している。

2003年度からの新課程の指導要領[5] でも，物理Ⅱの電磁誘導に関する部分の構成には大きな変化はないが，ローレンツ力についてふれることが明記されている。一方，物理Ⅰで「モーターと発電機」を扱うことになっている。導体の性質（物質の基本構造）とローレンツ力をもとにすれば，フレミングの右手の法則と左手の法則の区別は不要になる。このように，適当な段階で，現象の見方をより基本的なものに切換えてゆくことも必要であろう。この辺りは大学の役割かと思える。

高校生の学習歴は多様化している。大学側は新入生への導入教育・接続教育と同時に基礎専門教育の学習課程を整備することが大切である。

7．お　わ　り　に

専門的な電磁気学の教科書には個性的なものが多い。学問的な体系を構築するもの，現象を詳説するもの，学びの順序に重点を置くもの等，さまざまなタイプの教科書がある。読み比べているうちに，イメージが合わなくなったり，パラドックスになったりして，分っていたつもりのものが分らなくなる。私には，電磁気学でその種がつきない。

式（2）は混乱の種のひとつであった。本気で考えたのは，電磁気学の演習問題を用意する立場になったときである。なるべく直観的に把握できるように，まず自分の納得用に，3節の問題を考え付いた。以後，授業ではこのモデルを使って誘導現象を説明してきた。単純な演習問題であるが，これまでに同じような解説をしているものをまだ見かけていないので，今回，講義ノートのつもりで書き記した。

なるべく簡単な考え方を探すのは物理の役割のひとつと思う。省みて，ひとつのことを学びとるのに，無駄とは言えないのだが，ずいぶん多くの時間を費やしている。ジグザグ歩いた後に最短コースを見つけるのもトレーニングのひとつと思うが，学生にはまずはストレートなコースを進ませたい。とり組んだ後に小さな「発見」のステップが続くように課題を用意できればと考えている。

付録

相対論による電場と磁場の変換則

ひとつの荷電粒子の周りにはクーロン型の電場ができる。この荷電粒子が運動していると，電流とみなせるので，粒子の周りには電場と同時に磁場もできる。しかし，荷電粒子と一緒に動けば磁場はなくなる。電荷は変わらないが，場のようすは荷電粒子を見る座標系によって変わる。この

事実に矛盾しないように，相対論では2つの座標系の間で，場どうしの変換規則が導かれている。

相互に運動しあう2つの座標系 S 系と S' 系を想定する。S' 系は S 系の x 軸の正の方向へ一定の速さ v で進んでいるとする。S 系と S' 系が一致する時刻を $t=0$ とする。

S 系にある一般的な電場 $\boldsymbol{E}=(E_x, E_y, E_z)$ と磁場 $\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z)$ が，S' 系では電場 $\boldsymbol{E}'=(E_x', E_y', E_z')$ と磁場 $\boldsymbol{B}'=(B_x', B_y', B_z')$ に変わるとする。S' 系の成分を S 系の成分で表すと次の形になる。係数 γ は本文の式（8）で定義されている。

$$E_x'=E_x,\quad E_y'=\gamma\,(E_y-vB_z),\qquad E_z'=\gamma\,(E_z+vB_y)$$
$$B_x'=B_x,\quad B_y'=\gamma\,(B_y+vE_z/c^2),\quad B_z'=\gamma\,(B_z-vE_y/c^2) \tag{A1}$$

この式で $B_z=B_0$ とし，その他の成分 E_x, E_y, E_z, B_x, B_y を0とおけば，式（7）を得る。
この逆変換は

$$E_x=E_x',\quad E_y=\gamma\,(E_y'+vB_z'),\qquad E_z=\gamma\,(E_z'-vB_y')$$
$$B_x=B_x',\quad B_y=\gamma\,(B_y'-vE_z'/c^2),\quad B_z=\gamma\,(B_z'+vE_y'/c^2) \tag{A2}$$

となる。式（A2）は v の符号が変わっている以外は式（A1）と同型であり，運動の相対性が表わされている。

S' 系の原点に荷電粒子が止まっている場合は，B_x', B_y', B_z' のすべてを0とおく。このとき，S 系では荷電粒子の運動（電流）による磁場成分 B_y, B_z が現れている。この磁場 $\boldsymbol{B}$ は x 軸の周りにリング状（右ネジ型）に形成され，粒子と一緒に進行している。磁場 $\boldsymbol{B}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ は互いに直交している。一般的な変換則は場がこのように書き換えられるように作られている。

多数の粒子が x 軸上で線状につながって進行しているときは，このような磁場が重なり合い，アンペールの法則に従う静磁場に移行する。

文　献　等

1）flux rule の訳語。文献3）のファインマンの教科書による。この用語を他で見かけることはほとんどないが，2種の起源がある誘導起電力の特質を簡潔に表していると思えるので，以下でこの名称を使う。

2）金原寿郎　基礎物理学選書　電磁気学　裳華房　1974年
砂川重信　岩波全書　電磁気学　岩波書店　1977年
神田貞之助　共立物理学講座　精選電磁気演習　共立出版　1983年
他にも多くの教科書で式（2）の電場が記述されている。

3）R.P. ファインマン外　宮島龍興訳　ファインマン物理学Ⅲ　電磁気学　岩波書店　1969年
E.M. パーセル　飯田修一監訳　バークレー物理学コース　電磁気学　丸善株式会社　1971年
原　康夫　裳華房フィジックスライブラリー　電磁気学（Ⅱ）裳華房　2001年

4）大田昭男　はじめて学ぶ電磁気学　丸善株式会社　1999年
高村秀一　理工学のための電磁気学入門　森北出版　2002年
河野　汀，宮本正章　工学系の電磁気学　裳華房　2002年

5）高等学校学習指導要領解説　理科編，理数編　平成元年12月　文部省
高等学校学習指導要領解説　理科編，理数編　平成11年12月　文部省