2 レベル非線形計画問題に対する戦略的振動を用いた PSO とクラスタリングに基づく Stackelberg 解の導出

Computation Method of Stackelberg Solutions for Two-level Nonlinear Programming Problems Based on PSO and Clustering Using Strategic Oscillation

今地　大武
Hiromu Imaji
広島大学大学院
工学研究科
ba09238@cc.it-hiroshima.ac.jp

加藤　浩介
Kosuke Kato
広島工業大学情報学部
情報工学科
k.katoh.me@it-hiroshima.ac.jp

片桐　英樹
Hideki Katagiri
広島大学大学院
工学研究院
katagiri-h@hiroshima-u.ac.jp

Abstract— **In the present paper, the derivation of Stackelberg solutions for two-level nonlinear programming problems (TLNLPPs) including two decision makers with different priorities is focused on. In order to obtain (approximate) Stackelberg solutions to TLNLPPs more efficiently, we attempt to improve the performance of a PSO-based method using strategic oscillation.**

I.　はじめに

意思決定において優先権の異なる二人の意思決定者 (DM) をもつシステムの最適化問題の数理モデルとして，目的関数と制約条件がともに非線形である 2 レベル非線形計画問題に焦点をあてる．2 レベル計画問題において，決定に関して優先権をもつ DM を上位レベル DM と呼び，上位の決定に追従して決定を行う DM を下位レベル DM と呼ぶ．これらの二人の DM が積極的に協力する動機がなく，非協力関係にある場合の Stackelberg 解の導出について考察する．2 レベル非線形計画問題の Stackelberg 解導出の従来法としては，丹羽ら[2]による遺伝的アルゴリズムを用いた方法や松井ら[3]により，Particle Swarm Optimization (PSO) に基づく解法が提案されている．これらの手法は，解精度は比較的高いものの計算速度の点で改善の余地があると考えられる．そこで，三村[4]は戦略的振動[1]を用いた PSO に基づく解法を提案した．この方法は，従来手法[3]に対して，計算速度の面で優れているが，解の精度の面では劣る場合があるという問題点があった．そこで，本研究では，三村による提案アルゴリズムを再検討することによって，計算速度をある程度犠牲にしながらも，求解精度を向上させる手法を提案する．

II.　2 レベル非線形計画問題

経営や公共の意思決定問題においては，一般に，意思決定者が複数で，それぞれの関心はお互いに異なるものと考えられる．ここでは，各意思決定者が競合する目的をもち，各意思決定者の決定が独立に逐次的に行われるという状況下の意思決定問題のモデル化として 2 レベル非線形計画問題を考える．

$$\underset{\text{DM1（上位）}}{\text{minimize}} \quad f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

$$\underset{\text{DM2（下位）}}{\text{minimize}} \quad f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

$$\text{subject to} \quad g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, m$$

ここで，$\boldsymbol{x}_1$ は上位レベルの DM (DM1) の n_1 次元決定変数列ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ は下位レベルの DM (DM2) の n_2 次元決定変数列ベクトル，$f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ と $f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ は DM1 と DM2 の目的関数である．

本研究では，互いに協力しようとする動機がなく，意思決定者は互いに非協力関係にある場合を考える．このように非協力関係が仮定される場合に対する合理的な解の概念として Stackelberg 解が一般に採用される．Stackelberg 解は，二人の DM が相互に相手の目的関数と制約条件を知っており，下位の DM2 は与えられた上位の DM1 の決定に対して自己の目的を最適にする意思決定を行うという仮定の下で上位の

DM1 は自己の目的を最適にする決定を行うという状況での最適解であり，問題

$$\begin{aligned}&\underset{x_1}{\text{minimize}} \quad f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\ &\text{where } \boldsymbol{x}_2 \text{ solves}\\ &\underset{x_2}{\text{minimize}} \quad f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\ &\text{subject to} \quad g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ i = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

の最適解として与えられる．以下では，この問題の制約領域を S とする．詳しく述べれば，上位の DM1 の実行可能な決定 $\boldsymbol{x}_1$ が与えられると，下位の DM2 は与えられた $\boldsymbol{x}_1$ に対して自己の目的関数を最適化する問題

$$\begin{aligned}&\underset{x_2}{\text{minimize}} \quad f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\ &\text{subject to} \quad g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ i = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

の最適解（合理的応答）の集合 $R(\boldsymbol{x}_1)$ の中の要素 $\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1)$ を選択すると仮定されている．したがって，上位の DM1 はすべての実行可能な $\boldsymbol{x}_1$ に対する合理的応答の集合である誘導領域 $IR = \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mid (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in S, \boldsymbol{x}_2 \in R(\boldsymbol{x}_1)\}$ の中で自己の目的関数 $f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ を最適にする $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ の組，すなわち，次の問題

$$\begin{aligned}&\underset{x_1}{\text{minimize}} \quad f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\ &\text{subject to} \quad g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ i = 1, 2, \dots, m,\ \boldsymbol{x}_2 \in R(\boldsymbol{x}_1)\end{aligned}$$

の最適解を選択することになり，これが Stackelberg 解である．

III. 提案手法

三村が提案した PSO に基づく解法[4]は松井らの従来手法[3]に比べて約 50 倍高速である一方で，得られた解の精度（正確さ）では最大で約 9.3% 劣るという問題点があった．この原因の一つとして，三村の手法において，個体（解）の上位目的関数に関する評価の際に下位変数が合理的応答に十分に近い値になっていないことが考えられる．そこで，本研究では，三村[4]の手法の手順の再検討を行い，求解精度の向上を試みる．

まず，各個体の下位変数が上位変数の値に対する合理的応答により近くなるように，上位目的関数 f_1 に基づく個体群の最良個体と下位目的関数 f_2 に基づく個体群の最良個体を導入し，三村の戦略的振動に基づく解法[4]を以下のように修正する．

手順 0: 初期化

初期の探索点$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$をランダムに与える．さらに，PSO の個体群サイズや探索世代数などのパラメータ設定を行う．初期の探索点が実行可能ならば手順 1 へ進み，実行不可能ならば手順 4 へ進む．

手順 1: 実行可能領域内部から有望領域への移動

現在の探索点$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$に対して，$\boldsymbol{x}_1$ を固定し，$\boldsymbol{x}_2$を変数として f_2 に関する最適解を PSO により探索（個体群の f_2 に関する最良解を使用）し，$\boldsymbol{x}_1$に対する近似的な合理的応答 $\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1)$を求める．探索点を$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2') = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1))$に更新し，個体群の f_2に関する最良解も更新する．手順 2 へ行く．

手順 2: 有望領域周辺の探索

現在の探索点$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2')$に対して，$\boldsymbol{x}_2$の範囲を現在の $\boldsymbol{x}_2'$の近傍に限定して，f_1 の改善を目的として，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を変数として PSO により探索（個体群の f_2 に関する最良解を使用）し，最終的に f_1 の値がよい $\boldsymbol{x}_1''$と対応する近似的な合理的応答 $\boldsymbol{x}_2''$を求め，個体群の f_1, f_2 に関する最良解を更新する．ここで，終了条件を満たせば終了する．そうでなければ，手順 3 へ行く

手順 3: 実行不可能領域を含む拡大有望領域の探索

探索点$(\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'')$に対して，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$を変数として，制約条件を考慮せずに f_1の改善方向への探索（個体群の f_1に関する最良解を使用）を定められた回数だけ（大きく実行可能領域から逸脱しないように）PSO により行う．得られた最良点を新しい探索点$(\boldsymbol{x}_1''', \boldsymbol{x}_2''')$とし，個体群の f_1に関する最良解を更新する．手順 4 へ行く．

手順 4: 拡大有望領域から有望領域への移動

現在の探索点$(\boldsymbol{x}_1''', \boldsymbol{x}_2''')$に対して，$\boldsymbol{x}_2$を変数として，実行可能となるように PSO により探索（個体群の f_1に関する最良解を使用）を行う．ただし，$\boldsymbol{x}_2$の変更だけでは実行可能とならない場合は $\boldsymbol{x}_1$ も変数として探索を行う．これにより，現在の $\boldsymbol{x}_1'''$（もしくはこれに近い $\boldsymbol{x}_1$）に対する近似的な合理的応答を求めて，$(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*)$ とし，

個体群の f_1 に関する最良解を更新する．手順 5 へ行く．

手順 5: 有望領域での集中探索

$(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*)$ を現在の探索点として，手順 2 と同じ処理を行う．最終的に得られた解を $(\boldsymbol{x}_1^{**}, \boldsymbol{x}_2^{**})$ とする．

手順 6: 有望領域から実行可能領域内部への移動

$(\boldsymbol{x}_1^{**}, \boldsymbol{x}_2^{**})$ を現在の探索点として，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を変数として実行可能領域内部への探索を定められた回数だけ PSO により行う．得られた解 $(\boldsymbol{x}_1^{***}, \boldsymbol{x}_2^{***})$ を新しい探索点として，手順 1 へ行く．

このように，三村の手法と比較して，より積極的に合理的応答の方向へ探索するようにしているため，各個体の $\boldsymbol{x}_2$ は合理的応答により近くなると考えられる．また，合理的応答は $\boldsymbol{x}_1$ により異なるとともに同じ $\boldsymbol{x}_1$ であっても下位の目的関数は非線形であるため，複数の局所的な合理的応答が存在する可能性があり，これらをまとめて扱うと探索が収束しないことも考えられる．そこで，本研究では，複数の合理的応答を考慮することができるように，以下のように個体群のクラスタリングを行う手順を導入する．

1) 得られた解が，すでに得られている解の近傍に位置する場合は，得られた解をその近傍の解と同じクラスタに所属させる．既存のどの解の近傍にも位置しない場合，新たにクラスタを生成し，そこに所属させる．
2) 所属する解の個数が α 以下のクラスタについては，淘汰を行い，クラスタを解ごと消去する．
3) お互いに近い位置にあるクラスタは合併して，一つのクラスタとする．

IV. 適用結果

例題として，文献[3]において取り上げられていた次の 2 つの問題を用いる．いずれも 2 変数の 2 レベル非線形計画問題であり，その実行可能領域，誘導領域，Stackelberg 解は図 1 及び 2 に示される．両図において，黄色の部分が実行可能領域，青の点線が誘導領域，緑の楕円が上位目的関数の等高線，赤の星印が Stackelberg 解を表す．提案手法の有効性を検討するために，三村の手法と提案手法をこれらの問題に対して乱数系列を変えて 50 回適用した．各手法により得られた近似 Stackelberg 解と厳密な Stackelberg 解との誤差（ユークリッド距離）の最小値，最大値，平均値，標準偏差及び平均計算時間を表 1 および表 2 に示す．

問題 1

$$\underset{x_1}{\text{minimize}}\ \ f_1(x_1, x_2) = (x_1-5)^2 + (2x_2-2)^2$$

where x_2 solves

$$\underset{x_2}{\text{minimize}}\ \ f_2(x_1, x_2) = x_1^3-1.5x_1x_2 + (x_2-1)^2$$

$$\begin{aligned}\text{subject to}\ & -3x_1 + x_2 + 3 \leqq 0\\ & x_1 - x_2 - 4 \leqq 0\\ & x_1 + x_2 - 7 \leqq 0\\ & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0\end{aligned}$$

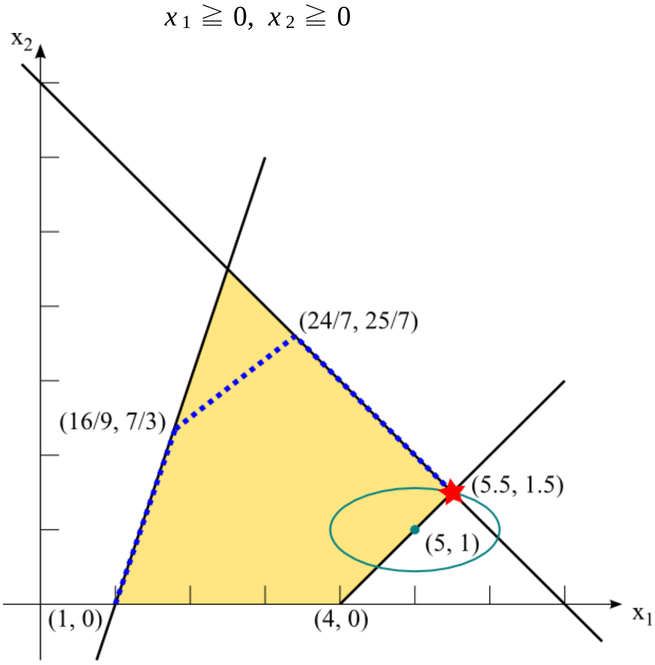

図 1　問題 1 の実行可能領域，誘導領域，Stackelberg 解

表 1　問題 1 への手法の適用結果

手法	提案手法	三村の手法[14]
最小誤差	0.635115	0.704599
最大誤差	4.236891	4.339214
平均誤差	0.914559	0.779577
誤差の標準偏差	0.8265	0.508521
平均時間(ms)	516.74	587.82

以上のように，提案手法は問題 1 においては，平均誤算，標準偏差の面では劣っているものの，その他の面では優れていることがわかる．

問題 2

$$\underset{x_1}{\text{minimize}}\ f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (2x_2 + 1)^2$$

where x_2 solves

$$\underset{x_2}{\text{minimize}}\ f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - 1.5x_1x_2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to}\quad & -3x_1 + x_2 + 3 \leqq 0 \\ & x_1 - 0.5x_2 - 4 \leqq 0 \\ & x_1 + x_2 - 7 \leqq 0 \\ & x_1 \geqq 0.\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

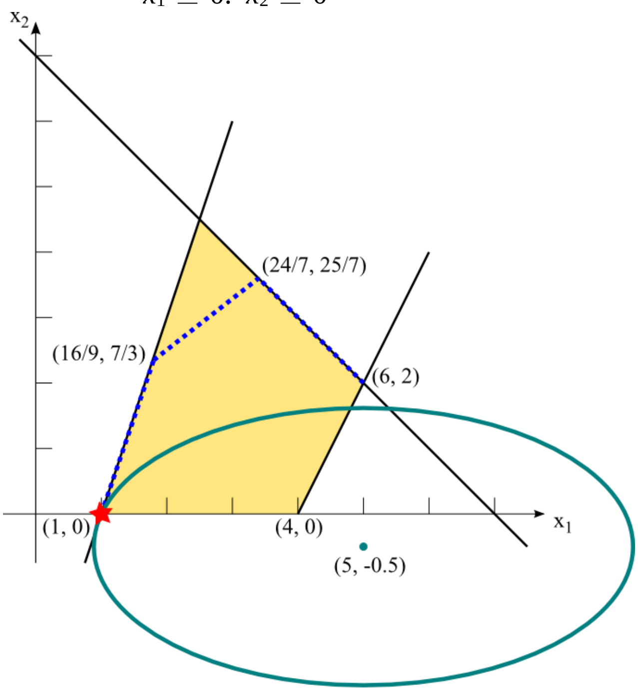

図２　問題 2 の実行可能領域，誘導領域，Stackelberg 解

表２　問題 2 への手法の適用結果

手法	提案手法	三村の手法
最小誤差	0.239748	0.185656
最大誤差	3.79048	3.797453
平均誤差	1.481849	3.231303
誤差の標準偏差	0.812036	1.135323
平均時間(ms)	523.36	537.5

以上のように，提案手法は問題 2 においては，すべての項目で三村の手法より優れていることがわかる．

V．おわりに

本研究では，2 レベル非線形計画問題に焦点をあて，その Stackelberg 解を導出するための戦略的振動を用いた PSO に基づく解法[4]の改良方法について考察した．求解精度の向上を目指して，一つは，各個体の下位変数が上位変数の値に対する合理的応答により近くなるような処理を三村の手法に加えた手法を提案した．さらに，複数の合理的応答を考慮することができるように，個体群のクラスタリングの手順の導入についても提案した．また，今回の提案手法の有効性も確認した．

参考文献

[1] S. Hanafi et al. : An efficient tabu search approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem, European Journal of Operational Research, Vol. 106, pp. 659-675, 1998.

[2] K. Niwa et al. : Computational methods for obtaining Stackelberg solutions to two-level non-linear programming problems, Proc. of 2nd Asia-Pacific Conference on Industrial Engneering and Management Systems, pp. 489-492, 1999.

[3] 松井猛 他 : 2 レベル非線形計画問題に対する Particle Swarm Optimization に基づく Stackelberg 解の計算方法, 知能と情報, Vol. 23, No. 3, pp. 350-362, 2011.

[4] 三村周平 : 2 レベル非線形計画問題に対する戦略的振動用いた PSO に基づく Stackelberg 解の導出に関する研究, 平成 24 年度広島工業大学情報学部卒業論文, 2013.

問い合わせ先
739-8527 東広島市鏡山一丁目 4 番 1 号
広島大学大学院工学研究科システムサイバネティクス専攻システム最適化論研究室
今地　大武