2 レベル非線形計画問題に対する戦略的振動を用いた PSO に基づく Stackelberg 解の導出法の改良

Improvement of a Computation Method of Stackelberg Solutions for Two-level Nonlinear Programming Problems Based on PSO Using Strategic Oscillation

今地　大武
Hiromu Imaji
広島工業大学情報学部
情報工学科
ba09238@cc.it-hiroshima.ac.jp

三村　周平
Shuhei Mimura
株式会社ダイコーテクノ

加藤　浩介
Kosuke Kato
広島工業大学情報学部
情報工学科
k.katoh.me@it-hiroshima.ac.jp

片桐　英樹
Hideki Katagiri
広島大学大学院
工学研究院
katagiri-h@hiroshima-u.ac.jp

Abstract— **In the present paper, the derivation of Stackelberg solutions for two-level nonlinear programming problems (TLNLPPs) including two decision makers with different priorities is focused on. In order to obtain (approximate) Stackelberg solutions to TLNLPPs more efficiently, we attempt to improve the performance of a PSO-based method using strategic oscillation.**

I. はじめに

意思決定において優先権の異なる二人の意思決定者 (DM) をもつシステムの最適化問題の数理モデルとして，目的関数と制約条件がともに非線形である 2 レベル非線形計画問題に焦点をあてる．2 レベル計画問題において，決定に関して優先権をもつ DM を上位レベル DM と呼び，上位の決定に追従して決定を行う DM を下位レベル DM と呼ぶ．これらの二人の DM が積極的に協力する動機がなく，非協力関係にある場合の Stackelberg 解の導出について考察する．2 レベル非線形計画問題の Stackelberg 解導出の従来法としては，丹羽ら[2]による遺伝的アルゴリズムを用いた方法や松井ら[3]により，Particle Swarm Optimization (PSO) に基づく解法が提案されている．しかしながら，計算速度や解の精度について，改善の余地があると考えられる．そこで，三村[4]は，Stackelberg 解が存在する領域である誘導領域を効率的に探索するために，タブー探索法などで利用される戦略的振動[1]を導入した PSO に基づく解法を提案し，計算時間に関してその有用性を示した．本研究では，三村[4]により提案された解法の改良を試みる．

II. 2 レベル非線形計画問題

経営や公共の意思決定問題においては，一般に，意思決定者が複数で，それぞれの関心はお互いに異なるものと考えられる．ここでは，各意思決定者が競合する目的をもち，各意思決定者の決定が独立に逐次的に行われるという状況下の意思決定問題のモデル化として 2 レベル非線形計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
&\underset{\text{DM1（上位）}}{\text{minimize}} && f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\
&\underset{\text{DM2（下位）}}{\text{minimize}} && f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\
&\text{subject to} && g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ i = 1,2, \ldots ,m
\end{aligned}
$$

ここで，$\boldsymbol{x}_1$ は上位レベルの DM(DM1)の n_1 次元決定変数列ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ は下位レベルの DM(DM2)の n_2 次元決定変数列ベクトル，$f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ と $f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ は DM1 と DM2 の目的関数である．

本研究では，互いに協力しようとする動機がなく，意思決定者は互いに非協力関係にある場合を考える．このように非協力関係を仮定する場合に対する合理的な解概念である Stackelberg 解は，二人の DM が相互に相手の目的関数と制約条件を知っており，下位の DM2 は与えられた上位の DM1 の決定に対して自己の目的を最適にする意思決定を行うという仮定の下で DM1 は自己の目的を最適にする決定を行うという状況での最適解である．具体的には，問題

$$
\begin{aligned}
&\underset{\boldsymbol{x}_1}{\text{minimize}} && f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\
&\text{where } \boldsymbol{x}_2 \text{ solves} && \\
&\underset{\boldsymbol{x}_2}{\text{minimize}} && f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\
&\text{subject to} && g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ i = 1,2, \ldots ,m
\end{aligned}
$$

の最適解として与えられる．以下では，この問題の制約領域を S とする．詳しく述べれば，上位の DM1 の実行可能な決定 $\boldsymbol{x}_1$ が与えられると，下位の DM2 は与えられた $\boldsymbol{x}_1$ に対応する問題

$$
\begin{aligned}
&\underset{\boldsymbol{x}_2}{\text{minimize}} && f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\
&\text{subject to} && g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ i = 1,2, \ldots ,m
\end{aligned}
$$

の最適解（合理的応答）の集合 $R(\boldsymbol{x}_1)$ の中の要素 $\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1)$ を選択すると仮定されているので，上位の DM1 はすべての実行可能な $\boldsymbol{x}1$ に対する合理的応答の集合である誘導領域 IR $=\{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mid (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in S, \boldsymbol{x}_2 \in R(\boldsymbol{x}_1)\}$ の中で自己の目的関数 $f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ を最適にする $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ の組，すなわち，次の問題

$$
\begin{aligned}
&\underset{\boldsymbol{x}_1}{\text{minimize}} && f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\\
&\text{subject to} && g_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leqq 0,\ i = 1,2, \ldots ,m,\ \boldsymbol{x}_2 \in R(\boldsymbol{x}_1)
\end{aligned}
$$

の最適解を選択することになり，これが Stackelberg 解である．

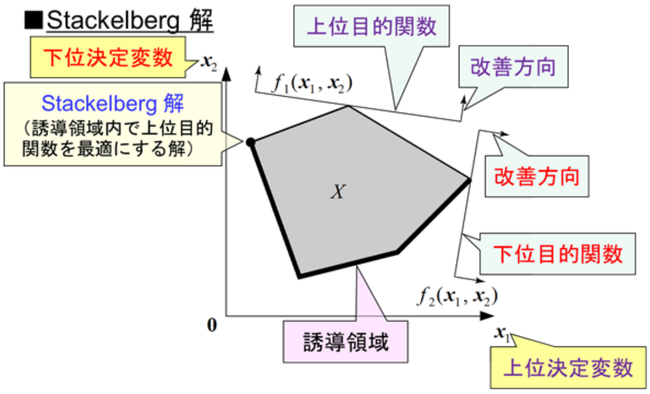

図 1. Stackelberg 解

III. 戦略的振動と PSO による STACKELBERG 解の導出

Hanafi ら [1] は，多次元 0-1 ナップサック問題に対して，戦略的振動を用いたタブー探索法を提案している．このタブー探索法では，多次元 0-1 ナップサック問題の最適解が実行可能領域の境界にあることに注目し，境界付近が最適解が含まれる可能性のある有望領域として集中的に探索されるとともに，意図的に実行可能領域内部や実行不可能領域への移動を行って解の構造を大幅に変化させた後再び有望領域へ移動させることにより有望領域の大域的な探索を可能にする戦略的振動が取り入れられている．

三村 [4] は，2 レベル非線形計画問題の Stackelberg 解が合理的応答の集合である誘導領域 IR に存在することに注目し，誘導領域 IR を有望領域とした戦略的振動を用いた PSO による Stackelberg 解の導出法を次のように提案した．

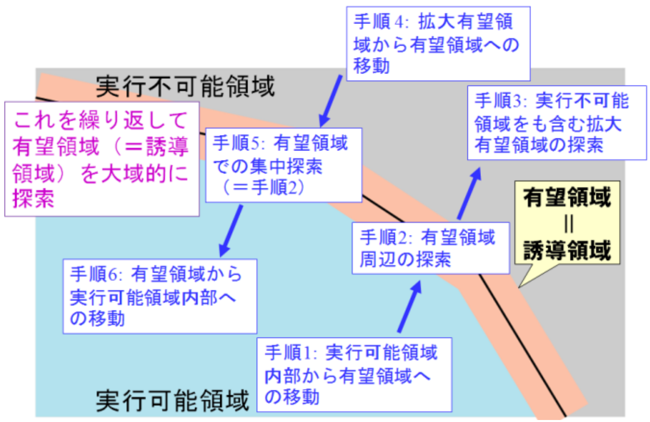

図 2. Stackelberg 解導出のための戦略的振動[4]

手順 0: 初期化

初期の探索点 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ をランダムに与える．さらに，PSO の個体群サイズや探索世代数などのパラメータ設定を行う．初期の探索点が実行可能ならば手順 1 へ進み，実行不可能ならば手順 4 へ進む．

手順 1: 実行可能領域内部から有望領域への移動

現在の探索点 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ に対して，$\boldsymbol{x}_1$ を固定し，$\boldsymbol{x}_2$ を変数として f_2 に関する最適解を PSO により探索して，$\boldsymbol{x}_1$ に対する近似的な合理的応答 $\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1)$ を求める．探索点を$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2') = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1))$ に更新する．手順 2 へ行く．

手順 2: 有望領域周辺の探索

現在の探索点 $(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2')$ に対して，$\boldsymbol{x}_2$ の範囲を現在の $\boldsymbol{x}_2'$ の近傍に限定して，f_1 の改善を目的として，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を変数として PSO により探索し，最終的に f_1 の値がよい $\boldsymbol{x}_1''$ と対応する近似的な合理的応答 $\boldsymbol{x}_2''$ を求める．ここで，終了条件を満たせば終了する．そうでなければ，手順 3 へ行く．

手順 3: 実行不可能領域を含む拡大有望領域の探索

探索点 $(\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'')$ に対して，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を変数として，制約条件を考慮せずに f_1 の改善方向への探索を定められた回数だけ（大きく実行可能領域から逸脱しないように）PSO により行う．得られた最良点を新しい探索点 $(\boldsymbol{x}_1''', \boldsymbol{x}_2''')$ とする．手順 4 へ行く．

手順 4: 拡大有望領域から有望領域への移動

現在の探索点 $(\boldsymbol{x}_1''', \boldsymbol{x}_2''')$ に対して，$\boldsymbol{x}_2$ を変数として，実行可能となるように PSO により探索を行う（ただし，$\boldsymbol{x}_2$ の変更だけでは実行可能とならない場合は $\boldsymbol{x}_1$ も変数として探索を行う）．これにより，現在の $\boldsymbol{x}_1'''$（もしくはこれに近い $\boldsymbol{x}_1$）に対する近似的な合理的応答を求めて，$(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*)$ とする．手順 5 へ行く．

手順 5: 有望領域での集中探索

$(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*)$ を現在の探索点として，手順 2 と同じ処理を行う．最終的に得られた解を $(\boldsymbol{x}_1^{**}, \boldsymbol{x}_2^{**})$ とする．

手順 6: 有望領域から実行可能領域内部への移動

$(\boldsymbol{x}_1^{**}, \boldsymbol{x}_2^{**})$ を現在の探索点として，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を変数として実行可能領域内部（制約余裕が増加する方向）への探索を定められた回数だけ PSO により行う．得られた解 $(\boldsymbol{x}_1^{***}, \boldsymbol{x}_2^{***})$ を新しい探索点として，手順 1 へ行く．

このように戦略的振動を採用することにより，Stackelberg 解を含む有望領域として誘導領域を集中的かつ大域的な探索が可能となり，三村[4]はいくつかの数値例に対する適用により，計算時間に関して，その優位性を示した．しかし，解の正確さに関しては従来法を下回る場合も見られた．その原因としては，Stackelberg 解はしばしば実行可能領域と実行不可能領域の境界に存在するが三村の方法では境界部分の探索を積極的に行う手順が導入されていないことが考えられる．そこで，本研究では境界部分の探索を行うための手順を追加することで解の正確さの改善を試みる．

IV. 境界探索のための手順

文献[3,4]においては，提案手法の有効性の検証のために，例えば，次のような問題が例として取り上げられており，決定変数は 2 変数（上位 1 変数，下位 1 変数）である．

［問題 1］

$$\underset{x_1}{\text{minimize}} \quad f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (2x_2 + 1)^2$$

where x_2 solves

$$\underset{x_2}{\text{minimize}} \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - 1.5x_1x_2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & -3x_1 + x_2 + 3 \leqq 0 \\ & x_1 - 0.5x_2 - 4 \leqq 0 \\ & x_1 + x_2 - 7 \leqq 0 \\ & x_1 \geqq 0, \ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

表 1. 問題 1 への適用結果（試行 10 回，値は上位目的関数値，平均計算時間（秒））

手法	三村[4]	PSO[3]
最良値	17.452	17.000
平均値	17.452	17.000
最悪値	17.452	17.000
計算時間	0.71	10.11

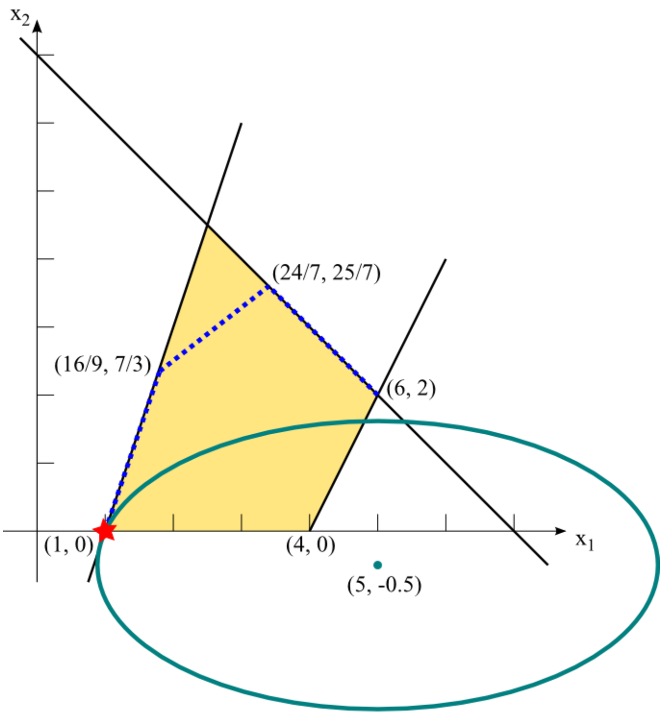

図 3. 問題 1 の実行可能領域，誘導領域，Stackelberg 解

図 3 において，黄色の部分が実行可能領域で，青の点線が誘導領域，緑の楕円が上位目的関数の等高線，赤の星印がこの問題の Stackelberg 解 (1, 0) を表し，そのときの上位目的関数値は f_1(1, 0) = 17 である．表 1 から，PSO[3] では Stackelberg 解が得られている一方，三村の手法[4]では Stackelberg 解に近い解は得られているものの厳密な Stackelberg 解は得られていないことがわかる．また，計算時間に関しては三村の手法が優れていることがわかる．

［問題2］

$$\underset{x_1}{\text{minimize}} \quad f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 10)^2$$

where x_2 solves

$$\underset{x_2}{\text{minimize}} \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_2^3 + x_1 - 2x_2 - x_1^2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 - 6 \leqq 0 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3 \leqq 0 \\ & x_1 \geqq 0, \ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

表 2. 問題 2 への適用結果（試行 10 回，値は上位目的関数値，平均計算時間（秒））

手法	三村[4]	PSO[3]
最良値	62.324	62.312
平均値	62.324	62.312
最悪値	62.324	62.312
計算時間	0.81	11.15

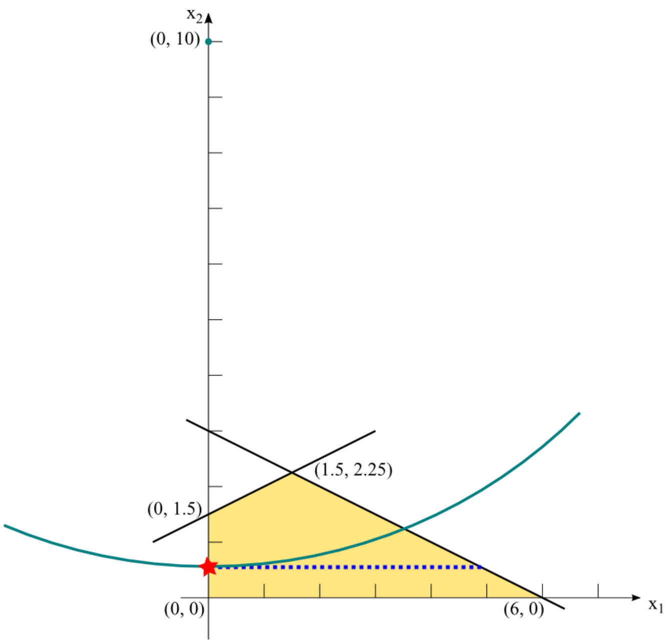

図 4. 問題 2 の実行可能領域，誘導領域，Stackelberg 解

図 4 において，黄色の部分が実行可能領域で，青の点線が誘導領域，緑の楕円が上位目的関数の等高線，赤の星印がこの問題の Stackelberg 解 (0, $(1/3)^{1/2}$) を表し，そのときの上位目的関数値

は f_1 (0, $(1/3)^{1/2}$) ≒ 88.786 である．表 2 から，PSO[3]および三村の手法[4]で厳密な Stackelberg 解は得られていないことがわかる．また，計算時間に関しては三村の手法が優れていることがわかる．

これらの問題のように，Stackelberg 解はしばしば実行可能領域と実行不可能領域の境界に存在するが，三村の方法では境界部分の探索を積極的に行う手順が導入されていないため，解の正確さにおいて劣っているとが考えられる．そこで，本研究では境界部分の探索を行うための次のような手順を追加することを提案する．

【境界探索のための手順】

Ⅰ）直前の手順の最終的な最良解付近に個体を生成する際，全個体の α %程度の個体をその最良解に対する制約関数 g_i の値が最大の制約条件が活性 ($g_i(\boldsymbol{x}) = 0$) となるように生成する。

Ⅱ）Ⅰで使用した以外の個体のうちランダムで β %の個体の最初の 5 世代に関しては，速度更新式にその最良解に対する制約関数 g_i の値が最大の制約条件に対する勾配ベクトルに－1 をかけたベクトル－$\nabla g_{i(}(\boldsymbol{x})$ を一定割合で付加する．

Ⅲ）制約条件 g_i を満たさない個体については，Ⅱで使用したベクトルの逆向きのベクトルを使用して制約条件内へ戻す.

以上の手順により，境界付近の探索が強化され，解の正確さが向上することが期待される．

V.　おわりに

本研究では，2 レベル非線形計画問題に焦点をあて，その Stackelberg 解を導出するための戦略的振動を用いた PSO に基づく計算方法の改良方法について提案した．今後は提案方法を実装し，数値例に対して適用し，従来法との比較を行い，有用性を検討する予定である．

参考文献

[1] S. Hanafi et al., ‘‘An efficient tabu search approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem,’’ European Journal of Operational Research, Vol. 106, pp. 659-675, 1998.

[2] K. Niwa et al., ‘‘Computational methods for obtaining Stackelberg solutions to two-level non-linear programming problems,’’ *Proc. of 2nd Asia-Pacific Conference on Industrial Engneering and Management Systems*, pp. 489-492, 1999.

[3] 松井猛 他,「2 レベル非線形計画問題に対する Particle Swarm Optimization に基づく Stackelberg 解の計算方法」, 知能と情報, Vol. 23, No. 3, pp. 350-362, 2011.

[4] 三村周平,「2 レベル非線形計画問題に対する戦略的振動を用いた PSO に基づく Stackelberg 解の導出に関する研究」, 平成 24 年度広島工業大学情報学部卒業論文, 2013.

問い合わせ先
〒731-5193
広島市佐伯区三宅 2-1-1
広島工業大学情報学部情報工学科
今地　大武