

# ビークルにおける静安定・動安定の研究

二輪モデル・状態平面を用いた解析

高畑 健二\*

(令和元年10月31日受付)

Research for Static, Dynamic Stability of vehicle  
Analysis using the Bicycle model and Phase plane

Kenji TAKAHATA

(Received Oct. 31, 2019)

## Abstract

Ordinary, method by the polarity of constant term in a characteristics equation is used to detect of vehicle stability. This paper describes that the definition of static stability and dynamic stability and generating mechanism of these stability. This analysis using state plane shows that the state vector made by planer half model expressing the stable or unstable conditions. This analysis result is able to define that the static stable or unstable, dynamic stable or unstable corresponding to pole placement of vehicle characteristics equation. Also it shows that dynamic instability for OS vehicle is not defined. This result will bring out that design the stability margin to distinguish static stability and dynamic stability at important process to design the control law for the active controlled SBW (Steer-by-Wire) vehicle.

**Key Words:** Vehicle Dynamics, Vehicle Stability, Static Stability, Dynamic Stability, Steer-by-Wire

## 1. はじめに

自動車を制御対象として、制御則の開発等をする場合、現代制御理論の発展に伴い、制御対象内の状態変数まで注目して設計できるようになった。このような背景において、制御対象の静的安定性、動的安定性をより高い次元で解析するために、静的安定性、動的安定性の定義および、静的安定性、動的安定性と状態変数との関係を明確にしたいことが本研究の動機である。

一般に自動車工学における静特性は復元モーメントの正負で判定する US、OS 特性を指すことが多い。

一方、制御工学における静安定は特性方程式の定数項で判定している。

この両者の判定方法を比較してみると、特に臨界速度以下の OS を想定した場合、前者の復元モーメント判定では負であり、静的不安定となるが、後者の特性方程式の定数項判定では正であり、静的安定となり矛盾してくる。

この研究はこの矛盾点を解析した後、車両操舵制御則の設計等において必要となる制御対象（車両）の安定性について静安定・動安定の意味を整理したうえ、それらの発生メカニズムについて二輪モデルと状態平面を用いて研究した結果を報告する。

この成果によって、車両操舵制御則の設計等における重要なプロセスであるフィードバック系の安定余有を静安定性・動安定性を意識して設計できる見通しを得た。

\* 広島工業大学工学部知能機械工学科

## 2. 先行研究におけるビークルの静安定・動安定

以下に、類似先行研究の概要を記述する。

### 2.1 先行研究 1 (Walter Bergman, 1966) [1]

US、OS 車両の特性について、静安定および、過渡特性についても考察し動安定条件を導いている。

- ・ US 車両：横滑り角速度が操舵入力時点で逆振れ後、復帰すれば方向安定性があり静安定、操舵後、ヨーダンピングがあれば動安定
- ・ OS 車両：横滑り角速度が操舵入力時点で逆振れ後そのまま発散し、方向安定性がないので静的不安定、動安定についてはありえないケースとして扱っている。

### 2.2 先行研究 2 (近藤政市, 1967) [2] [3]

US、OS 車両の安定性を、以下のように復元モーメント、特性方程式の定数項、運動の発散・収束状況等を論拠とした安定性を静的・動的な視点で見ると、以下のように記述してある。特に、OS 車両の安定限界速度  $V_c$  以上での安定性の表現は先行研究 2 と 4 で下線箇所が異なる。

- ・ US 車両：速度に関わらず復元モーメントが正であるから、静安定であり、特性方程式の定数項が正であるから動安定
- ・ OS 車両：復元モーメントが負であるから、速度に関わらず静的不安定であり、安定限界速度  $V_c$  以下では特性方程式の定数項が正であるから動安定、安定限界速度  $V_c$  以上では特性方程式の定数項が負であるから動的不安定
- ・ 静的限界は静的復元モーメントが 0 になる境界、動的限界は固有値の実数が 0 になる境界であり、動的とは復元経過に注目することである。
- ・ 静的限界線は動的限界線より上方にあるから、静的に安定ならば必ず動的に安定であって、したがって静的安定条件は動的安定条件より過酷である。これは自動車の安定性の大きな特色（飛行機の安定性とは逆）である。

### 2.3 先行研究 3 (加藤寛一郎ほか, 1985) [4]

航空機の速度に対する静安定は揚力着力点と重心点間距離による復元モーメントに依存し、前進速度が高いほど揚力は大きくなるため、揚力低下に伴う静的不安定（失速）は低速で発生する。すなわち、前進速度の増加に伴い静的安定性（復元モーメント）は向上する。静安定・動安定の関係性を以下に示す。

- ・ 静安定：発散、収束過程には関係なく復元力や復元モーメントが働く安定性
- ・ 動安定：平衡状態に戻るように復元力や復元モーメントが働くこと。すなわち、全ての状態変数が動的に安定であることであり、静安定より厳しい条

件を満たす必要がある。（自動車の安定性とは逆）

- ・ 系が動的に安定であるための必要十分条件は Hurwitz の安定条件を満足すること。
- ・ 系が静的に安定であるための必要条件は特性方程式の定数項が正であること。

（静的安定ならば必ず定数項は正だが、定数項が正でも必ずしも静的安定ではない。）

### 2.4 先行研究 4 (安部正人, 2009) [5] [6]

- ・ US 車両：遷移速度  $V_s$  以下では一様収束、 $V_s$  以上では振動的収束するから（特に静安定と動安定を区別せず）安定
- ・ OS 車両：安定限界速度  $V_c$  (表 1 の脚注参照) 以下では一様収束するから、（特に静安定と動安定を区別せず）安定、 $V_c$  以上では一様発散するから静的不安定

### 2.5 先行研究 5 (Dean Karnopp, 2012) [7] [8]

- ・ 静的不安定：運動の特性方程式の根（固有値）のうち正の実根を有するものがあり、一様に発散する。
- ・ 動的不安定：運動の特性方程式の根（固有値）のうち実数部が正の共役複素根を有するものがあり振動的に発散する。

この文献では静的、動的安定性については明確には記述されていないので、上記記述から類推すると、

- ・ 静安定：運動の特性方程式の根（固有値）すべてが負の実根を有し、一様に収束する。
  - ・ 動安定：運動の特性方程式の根（固有値）すべての実数部が負の共役複素根を有し、振動的に収束する。
- この考え方によって、自動車工学でいうアンダーステア（以下、US）車両、オーバーステア（以下、OS）車両運動の安定性を見てみると、以下になる。

- ・ US 車両：
  - ・ 遷移速度  $V_s$  以下では固有値が負の実根だから静安定
  - ・ 遷移速度  $V_s$  以上では固有値が負の共役複素根だから動安定
- ・ OS 車両：
  - ・ 安定限界速度  $V_c$  以下では固有値が負の実根だから静安定
  - ・ 安定限界速度  $V_c$  以上では固有値が正負の実根だから静的不安定

## 3. 車両の静安定・動安定

### 3.1 解析モデル

解析に使用する二輪モデルの運動方程式を式(1)、状態量（ $r$ ：ヨーレート、 $\beta$ ：横滑角）を陽にした状態方程式を式(2)に示し、そのブロック線図を図 1 に示す。式(1)の変数

の意味を表1に示す。この二輪モデルは操作量を前輪操舵角 ( $\delta$ )、制御量を角速度 ( $r + \dot{\beta}$ ) とする。

$$\left. \begin{aligned} mV(\dot{\beta} + r) + 2(C_f + C_r)\beta + 2(l_f C_f - l_r C_r) \frac{r}{V} &= 2C_f \delta \\ \dot{r} + 2(l_f C_f - l_r C_r)\beta + \frac{2}{V}(l_f^2 C_f + l_r^2 C_r)r &= 2l_f C_f \delta \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \delta \\ \text{where,} & \\ A_{11} &= \frac{2(l_f^2 \cdot C_f + l_r^2 \cdot C_r)}{I \cdot V}, A_{12} = \frac{2(l_r \cdot C_r - l_f \cdot C_f)}{I}, \\ A_{21} &= \frac{2(l_r \cdot C_r - l_f \cdot C_f)}{m \cdot V^2} - 1, A_{22} = \frac{2(C_f + C_r)}{m \cdot V}, \\ B_1 &= \frac{2l_f C_f}{I}, B_2 = \frac{2C_f}{m \cdot V} \end{aligned} \right\} (2)$$

Table1 Parameter definition and value

$\delta$	Front wheel steering angle	Control input
$r$	Yaw rate	State Variable
$\beta$	Side slip angle	State Variable
$m$	Vehicle mass	1460kg
$I$	Yaw inertia moment	2050kgm <sup>2</sup>
$l$	Wheel base	2550mm
$l_f$	Distance from CG to Front wheel	1070mm
$l_r$	Distance from CG to Rear wheel	1480mm
$C_f$	Front tire cornering stiffness	US:34.5kN/rad
		OS:50kN/rad
$C_r$	Rear tire cornering stiffness	US:46kN/rad
		OS:34.5kN/rad
$V$	Vehicle velocity	Arbitrary

### 3.2 制御対象であるビークルの特性方程式

式(2)のシステム行列  $A$  の各要素が車両の運動特性を決定するため、各要素の機能を明らかにした後、二輪モデルの特性方程式を求め、安定性に関して考察する。また、 $A$  の対角要素  $A_{11}$  はヨーレート  $r$  を  $r$  へフィードバックさせ、 $A_{22}$  は横滑り角  $\beta$  を  $\beta$  へフィードバックさせる状態遷移要素である。 $A$  の非対角要素  $A_{12}$  および  $A_{21}$  は状態量 ( $r, \beta$ ) を  $\beta$  および  $r$  へクロス (相互) フィードバックさせる状態遷移要素である。ヨーレート系および横滑り角系の伝達関数式(3)、(4)から特性方程式は(5)になる。

$$\frac{r}{\delta} = \frac{(s + A_{22})B_1 + A_{12}B_2}{\Delta} \quad (3)$$

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{A_{21}B_1 + (s + A_{11})B_2}{\Delta} \quad (4)$$

$$\Delta = s^2 + A_1 s + A_0, A_1 = A_{11} + A_{22}, A_0 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

$$s^2 + A_1 s + A_0 = 0 \quad (5)$$

### 3.3 特性方程式の定数項の解析

特性方程式の定数項の正負のみの判定では安定状態をまとめて判定するので、安定状態の質 (安定性が静的なのか、動的なのか) までは判定できないため、特性方程式の定数項について解析する。

定数項の解析方法として、参考文献 (菅沢ほか、1995) [9] では、ばね・質量系 (2次系) の物理的な解釈事例として、フィードバック成分が減衰力相当、クロスフィードバック成分がばね力相当であり、これらの物理的意味を分けることで車両挙動解析の質が向上すると述べられている。

この解釈方法を参考にしつつ、本研究独自の解析を行った。ばね・質量系における、ばね力は変位に比例して力を発生し、減衰力は速度に比例して力を発生することで、外力に対して抵抗力となる。この物理的解釈を二輪モデルへ適用すると  $A_{12}$  (復元モーメント  $M_r$  (図1) を含むため、US時: 正極性、OS時: 負極性) は  $\beta$  (横滑り角) を入力として、抵抗または発散モーメント  $A_{12} \times \beta$  を  $r$  発生ダイナミクスへクロスフィードバックし、 $A_{21}$  (復元モーメント  $M_r$  を含むため、US時: 低速時は正極性、高速時は負極性 ( $\approx -1$ ))、OS時: 負極性) は  $r$  (角速度) を入力として、抵抗または発散モーメント  $A_{21} \times r$  を  $\beta$  発生ダイナミクスへクロスフィードバックすることで外力に対し、US、OS特性、車両速度に応じて抵抗または発散モーメントとなる。 $A_{12}$ 、 $A_{21}$  からのクロスフィードバックがなければ、 $r$  発生ダイナミクスおよび  $\beta$  発生ダイナミクスは共に安定な1次系であり、それぞれの発生ダイナミクスの固有値は負の実数となる。

一方、US、OS指標は式(6)に再掲したクロスフィードバックゲイン  $A_{12}$ 、 $A_{21}$  に含まれる復元モーメント ( $l_r \cdot C_r - l_f \cdot C_f = M_r$ ) が「正のときはUS」、「負のときはOS」と定義 (近藤、1967) される。

$$A_{12} = \frac{2(l_r \cdot C_r - l_f \cdot C_f)}{I}, A_{21} = \frac{2(l_r \cdot C_r - l_f \cdot C_f)}{m \cdot V^2} - 1 \quad (6)$$

それぞれの発生ダイナミクスに状態量 ( $r, \beta$ ) がクロスフィードバックされるとき、定数項  $A_0 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$  ( $\det A$  に相当) は、 $A_{12}$ 、 $A_{21}$  の内部に静特性である復元モーメント  $M_r$  が含まれることから、定数項の安定

判別では静的状態と動的状态が混在し、安定性の質の解釈が分かれるものと考えられる。操舵特性と A 行列要素、定数項の極性を整理したものを表 2 に示す。表 2 から A 行列の大きさ (Determinant) が負になる場合のみ不安定となる。この不安定の性質 (動的なのか、静的なのか) について次章で説明していく。

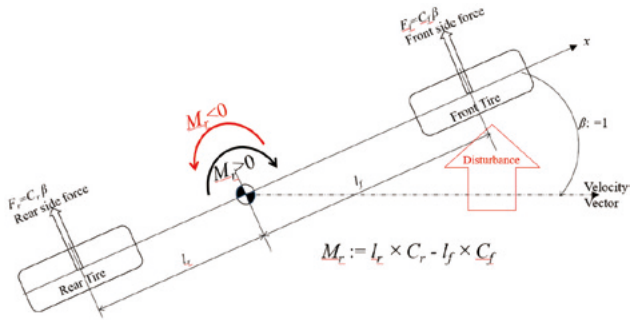


Fig.1 Recovery Moment  $M_r$

Table3 Polarity of A element and Constant term  $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{21}$	$A_{22}$	$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$
US	positive	positive	positive	positive	positive
OS $V < V_c$	positive	positive	positive	positive	positive
OS $V > V_c$	positive	positive	positive	positive	negative

#### 4. 静安定・動安定と復元性・安定性

本研究では安定性と復元性の関係について以下のように提案し、その妥当性について論述していく。

- ・ 静安定 := 速度・固有値に依存しない復元性
- ・ 動安定 := 速度・固有値に依存する安定性

##### 4.1 安定性と復元性

本研究の提案を図示すると図 2 の関係になる。

図 2 の下側横軸は、静的安定とは、発散、収束とは無関係に復元モーメントが働くことを意味し、中心から右側が正の復元モーメントであり、右へ行くほど正の復元モーメントが強くなることを意味する。中心から左側が負の復元モーメントであり、左へ行くほど負の復元モーメントが強くなることを意味する。

図 2 の中心縦軸は特性方程式の定数項 ( $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ ) が正 (Hurwitz 安定条件の一部、Hurwitz 安定条件は動的に安定であるための必要十分条件) であることは動的に安定であるための必要条件であり、静的安定かつ平衡状態 (4.2項で後述) へ収束し、全ての状態変数が動的に安定であることを意味する。

図 2 の左上側の領域は特性方程式の定数項 ( $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ ) が負であり、動的に不安定であることを意味する。

なお、図 2 は参考文献 [10] に掲載された図を基に筆者の研究成果を反映したものである。

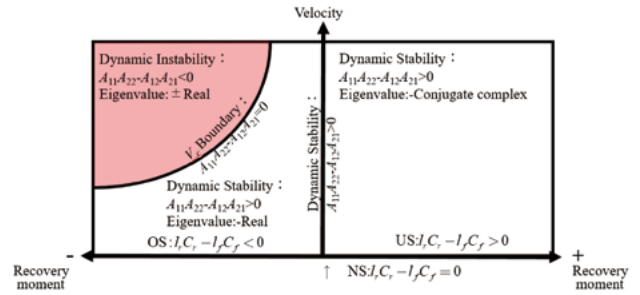


Fig.2 The Relationship of Stability and Recovery Moment.

#### 4.2 位相平面による解析

状態変数の挙動を図 3 の位相平面で解析する。

- (1) 軌道平衡点が動的収束点であり、フィードバックゲイン積 ( $A_{11}A_{22}$ ) が干渉ゲイン積 ( $A_{12}A_{21}$ ) を上回る ( $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} > 0$ ) と焦点が発生し、動的に安定となる。
- (2) フィードバックゲイン積 ( $A_{11}A_{22}$ ) が干渉ゲイン積 ( $A_{12}A_{21}$ ) を下回る ( $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} < 0$ ) と、鞍点が発生し、動的に不安定となる。
- (3) フィードバックゲインはモビリティ (動的) ゲイン、干渉ゲインはステイフネス (静的) ゲインであり、動的ゲイン > 静的ゲインならば動的に安定となることが理解できる。
- (4) 位相面軌道において、動的に安定であると、状態軌道が焦点へ収束する理由は、固有ベクトルの方向が安定な固有値によって、平衡点へ向かう方向になるためである。逆に、動的に不安定であると、状態軌道が鞍点から発散する理由は、固有ベクトルの方向が不安定な固有値によって、平衡点から遠ざかる方向になるためである。

#### 5. まとめ

- (1) 車両運動を増強または補償するための操舵 (ステア・バイ・ワイヤ、SBW) 制御設計等において必要となる制御対象 (車両) の安定性について新たに静安定・動安定の定義および、それらの基本的発生メカニズムを明らかにできた。
- (2) この成果によって、SBW を代表とする車両操舵制御設計におけるフィードバック系の安定性補償を静安定・動安定の発生メカニズムから車両 (制御対象) と制御則の分担を考慮できる以下の知見を得ることができた。
- (3) 車両 (制御対象) が元来有するステア特性 (静特性) を補償するため、あるいは、静特性を緩和 (復元モーメントを小さく) して運動性を向上させるためには、クロスフィードバック要素 ( $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ) に対して、静安定緩和補償 (RSS: Relaxed Static Stability) を働か



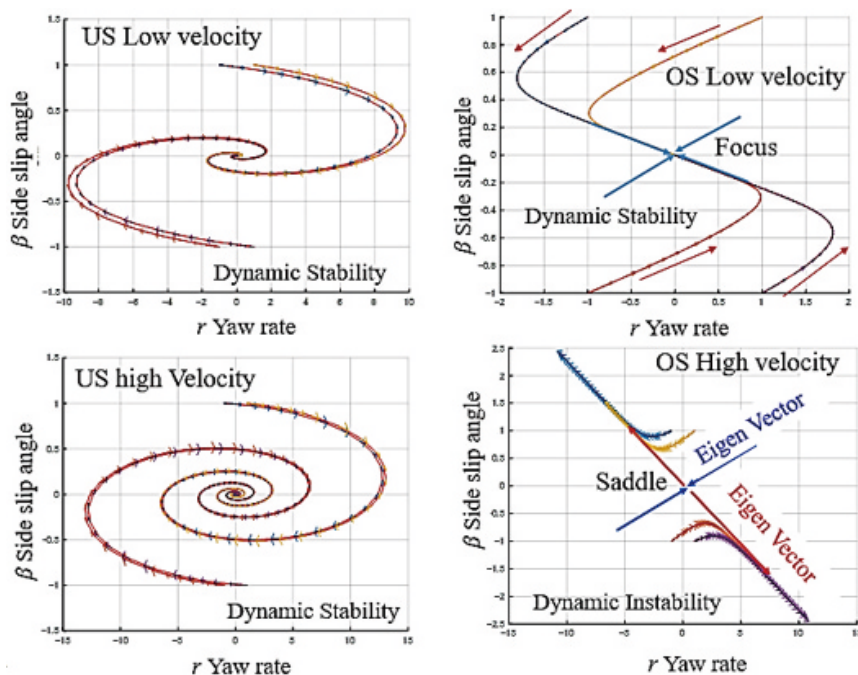


Fig.3 The state variable behavior in the phase plane.

せることにより静安定を補償できる操舵制御則を設計するための知見を得た。

- (4) 車両（制御対象）が元来有する運動特性（動特性）を補償するため、フィードバック要素 ( $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ) に対して、安定増強則 (SAS: Stability Augmentation system) (金井, 1995) [11]、操縦性増強則 (CAS: Control Augmentation system) (金井, 1995) [12] を働かせることにより動安定を補償できる操舵制御則を設計するための知見を得た。

## 6. 今後の課題

- (1) 車両限界ステア特性を想定した場合、制御状態から無制御状態へのステア特性のトランジェントを安全かつ実用的な範囲にするため、制御時のステア特性と無制御時のステア特性のバランスを見極めることやロバスト性の考慮も、今後の重要な課題である。
- (2) 今後は静安定・動安定の操舵制御則にモデルマッチング・最適オブザーバを適用し、その効果を実証していく。

## 謝 辞

この論文は日本機械学会第28回交通・物流部門 (TRANSLOG2019, 2019.11.29於サテライトキャンパスひろしま) で学術講演するために執筆した下記論文の基礎研究活動における共同研究の一環でまとめたものである。

この場を借りて、共著者の皆様に感謝申し上げます。

・太田利夫<sup>1</sup>、楊劍鳴<sup>1</sup>、高畑健二、楊孫東<sup>1</sup>:自動車工学、

制御工学から見た車両の静安定、動安定の定義、

<sup>1</sup>:名城大学理工学部メカトロニクス工学科

## 文 献

- [1] Walter Bergman: The Basic Nature of Vehicle Understeer-Oversteer, SAE Transaction650085, pp. 387-422 (1966)
- [2] 近藤政市:基礎自動車工学前期編、養賢堂、p. 246 (1967)
- [3] 近藤政市:基礎自動車工学後期編、養賢堂、p. 37(1967)
- [4] 加藤寛一郎ほか:航空機力学入門、東京大学出版会、pp. 139-140 (1985)
- [5] 安部正人:自動車の運動と制御、東京電機大学出版局、pp. 86-89 (2009)
- [6] 安部正人:自動車の運動と制御、東京電機大学出版局、p. 41 (2009)
- [7] Dean karnopp: VEHICLE DYNAMICS, STABILITY, AND CONTROL 2<sup>nd</sup> edition, CRC Press, p. 53 (2012)
- [8] Dean karnopp: VEHICLE DYNAMICS, STABILITY, AND CONTROL 2<sup>nd</sup> edition, CRC Press, pp. 197-201 (2012)
- [9] 菅沢深ほか:状態変数間の連成項に着目した操安性解析方法 (第1報)、日本機械学会論文集 (C編)、Vol. 61、No. 591、pp. 186-187 (1995)
- [10] 近森順:自動車工学の基礎、名古屋大学出版会、p. 177 (2018)

- [11] 金井喜美雄ほか：航空宇宙における誘導と制御、計測自動制御学会、p. 117 (1995)
- [12] 金井喜美雄ほか：航空宇宙における誘導と制御、計測自動制御学会、pp. 48-51 (1995)